ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS

ECUACIONES HOMOGÉNEAS. Si una función f tiene la propiedad $f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y)$ para algún número real α, entonces se dice que es una función homogénea de grado α

EJEMPLO 1. $f(x,y)=x^3+y^3$ es homogénea de grado 3, por que

$f(tx,ty)=(tx)^3+(ty)^3=t^3\left(x^3+y^3\right)=t^3f(x,y)$ Mientras que $f(x,y)=x^3+y^3+1$ no es homogénea

Una ecuación diferencial de primer orden: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ Es homogénea si los coeficientes $M(x,y),N(x,y)$ a la vez, son funciones homogéneas del mismo grado.

En otras palabras la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es homogénea si:

$M(tx,ty)=t^{\alpha}M(x,y)$ y $N(tx,ty)=t^{\alpha}N(x,y)$

MÉTODO DE SOLUCIÓN:

Una ecuación diferencial homogénea como $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ se puede resolver por sustitución algebraica (cambio de variables), específicamente, alguna de las dos sustituciones $y=ux;\ x=vy$ dónde u y v son nuevas variables dependientes, reduce la ecuación a una ecuación diferencial separable, de primer orden.

NOTA: Aunque se puede usar cualquiera de las sustituciones en toda ecuación diferencial homogénea, en la práctica probaremos con $x=vy$ Cuando la funcion $M(x,y)$ sea más simple que $N(x,y)$. También podría suceder que después de aplicar una sustitución, nos encontramos con integrales difíciles o imposibles de evaluar en forma cerrada; en este caso, si cambiamos la variable sustituida quizá podamos tener un problema más fácil de resolver.

Este tipo de ecuación diferencial homogénea, significa que es de la forma $\frac{dy}{dx}=r(x,y)$ donde *r* es una función tal que $r(ax,ay)=r(x,y)$ para todo número *a*.

En derive la orden **HOMOGENEOUS_GEN (r(x,y), x, y, k)** da una solución general en términos de la constante simbólica k si r es homogénea.

De igua forma la orden **HOMOGENEOUS(r(x,y), x, y, x_0, y_0),** da una solución particular dada las condiciones iniciales de la ecuación diferencial

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$

Para verificar si es homogénea $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}\Rightarrow xydx-(x^2-y^2)dy=0$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Al examinar $M(x,y)=xy$ y $N(x,y)=x^2-y^2$ vemos que los dos coeficientes son funciones homogéneas de grado 2.
Ahora utilizamos Derive

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 – Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$

#4: $xy\cdot dx+(y^2-x^2)\cdot dy=0$

#5: InputMode := Character

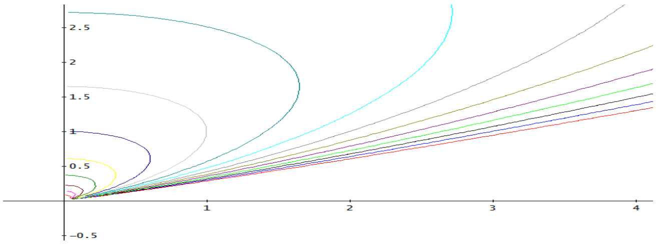
#6: $\text{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(\frac{x\cdot y}{x^2-y^2},\ x,\ y,\ k\right)$

#7: $\text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-k$

#8: $\text{VECTOR}\left(\text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-k,\ k,\ -5,\ 5,\ 0.5\right)$

#9: $\left[\text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=5-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=\frac{9}{2}-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=4-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=\frac{7}{2}-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=3-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=\frac{5}{2}-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=2-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=\frac{3}{2}-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=1-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=\frac{1}{2}-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x),\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-\frac{1}{2},\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-1,\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-\frac{3}{2},\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-2,\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-\frac{5}{2},\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-3,\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-\frac{7}{2},\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-4,\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-\frac{9}{2},\ \text{LN}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2\cdot y^2}=-\text{LN}(x)-5\right]$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas



EJEMPLO 3. Resolver la ecuación diferencial $(x+y)dx+(y-x)dy=0$, hallando la solución que pasa por el punto $(1,1)$

Al examinar $M(x,y)=x+y$ y $N(x,y)=y-x$ vemos que los dos coeficientes son funciones homogéneas de grado 1.

Para resolver este tipo de ecuaciones, DERIVE dispone de la orden:

HOMOGENEOUS ((x + y)/(x-y), x, y, 1, 1)

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $(x + y)\cdot dx + (y - x)\cdot dy = 0$

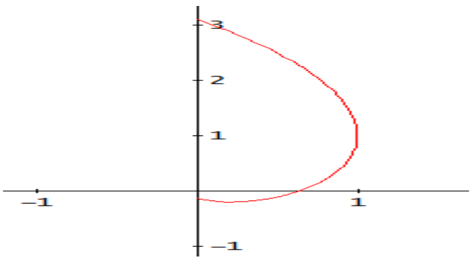
SE VERIFICA QUE ES HOMOGÉNEA DE GRADO 1

#4: $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$

#5: InputMode := Character

#6: $\text{HOMOGENEOUS}\left(\frac{x + y}{x - y}, x, y, 1, 1\right)$

#7: $\text{ATAN}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\text{LN}\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)}{2} = \text{LN}(x) - \frac{\text{LN}(2)}{2} + \frac{\pi}{4}$



Para comprobar que la solución hallada es la correcta, podemos utilizar la función **IMP_DIF(RESULTADO OBTENIDO – EDO HOMOGENEA DADA)** cuyo resultado es cero, garantizando que la solución encontrada es buena. Para utilizar la función anterior es necesario haber cargado la utilidad **DIF APPS.MTH**. **(LEER – UTILIDADAES – DIFFERENTIATIONAPPLICATIONS.MTH)**

IMP_DIF(ATAN(y/x) - LN((x^2 + y^2)/x^2)/2 - LN(x) + LN(2)/2 - π/4) - (x + y)/(x - y)

#8: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 – Evaluación\Math\DifferentiationApplications.mth)

#9: $$\text{IMP\_DIF}\left(\text{ATAN}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\text{LN}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)}{2} - \text{LN}(x) + \frac{\text{LN}(2)}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{x+y}{x-y}$$

#10: 0

EJEMPLO 4. Resolver la ecuación diferencial $(x+ye^{\frac{y}{x}})dx-(xe^{\frac{y}{x}})dy=0$, con la condición inicial $y(1)=0$

Al examinar $M(x,y)=(x+ye^{\frac{y}{x}})$ y $N(x,y)=(xe^{\frac{y}{x}})$ vemos que los dos coeficientes son funciones homogéneas de grado 1.

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 – Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $(x + y\cdot e^{y/x})\cdot dx - x\cdot e^{y/x}\cdot dy = 0$

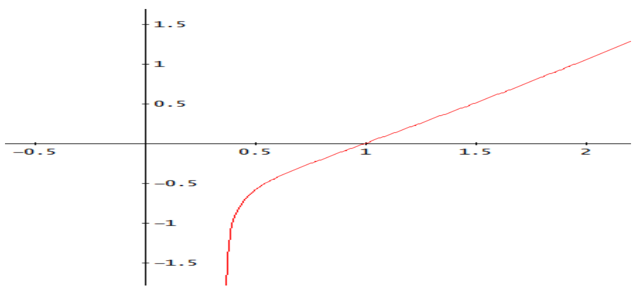
se demuestra que es homogénea de grado 1

#4: $$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y\cdot e^{y/x}}{x\cdot e^{y/x}}$$

#5: InputMode := Character

#6: $$\text{HOMOGENEOUS}\left(\frac{x + y\cdot e^{y/x}}{x\cdot e^{y/x}}, x, y, 1, 0\right)$$

#7: $e^{y/x} = \text{LN}(x) + 1$



En ocasiones no sabemos si la función *r* es homogénea, quizás por su complicación al no estar lo bastante simplificada. Para estos casos, DERIVE si no es homogénea da la siguiente información: **INAPPLICABLE.**

NOTA: se pueden resolver haciendo algunos cambios de variables.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 5. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+xy^2}{y+x^2y}$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cdot x + xy^2}{y + x^2\cdot y}$$

#4: $$\mathrm{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(\frac{3\cdot x + xy^2}{y + x^2\cdot y}, x, y, k\right)$$

#5: inapplicable

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas