FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

DEFINICIONES DE FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES.

Una función de n variable es un conjunto de pares ordenados de la forma (p,w) en el cual dos pares ordenados diferentes no tienen el mismo primer elemento. P es un punto en el espacio numérico n-dimensional y w es un número real.

FUNCIONES DE DOS VARIABLES

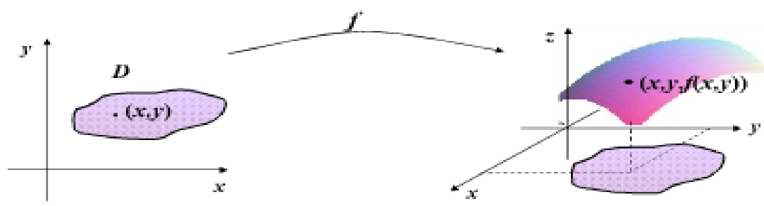
Sea D un conjunto de pares ordenados (x,y) de números reales $D \subset R^2$. Una función real de dos variables reales es una regla que asigna a cada par ordenado (x,y) en D un único número real denotado por $f(x,y)$

El conjunto D es llamado el dominio de la función y el conjunto de todos los valores de la función es el rango de la función.

En una función de dos variables se suele utilizar *z* (variable dependiente) para representar los valores de la función $f(x,y)$: $z = f(x,y)$, donde x, y son las variables independientes.

$z = f(x,y)$ La definimos como una función $f: D \subset R^2 \to R$ de conjuntos de puntos donde $\{(p,z)/z = f(x,y), P \in R^2 \wedge z \in R\}$

Gráficamente



EJEMPLO 1. Hallar $f\left(\frac{1}{2},3\right)$ y $f(1,-1)$ si $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$

$$f(x,y) = xy + \frac{x}{y} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2},3\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(3) + \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \therefore f\left(\frac{1}{2},3\right) = \frac{5}{3}$$

$$f(1,-1) = (1)(-1) + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2 \therefore f(1,-1) = -2$$

EJEMPLO 2. Hallar $f(x,y), f(-x,-y), f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right), \frac{1}{f(x-y)}$ si $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \Rightarrow a)\, f(-x,-y) = \frac{(-x)^2 - (-y^2)}{2(-x)(-y)} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

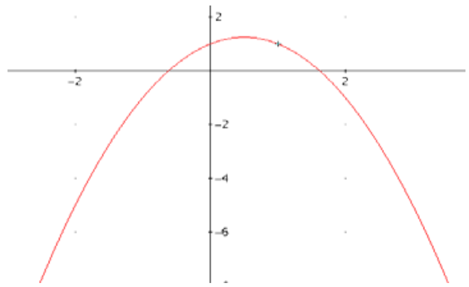
$$b)\, f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right) = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{2\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{y^2 - x^2}{2xy};\ c)\, sí\ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \Rightarrow \frac{1}{f(x,y)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

EJEMPLO 3. Hallar los valores que toma la función $f(x,y) = 1 + x - y$ en los puntos de la parábola $y = x^2$ y construir la gráfica de la función $F(x) = f(x, x^2)$.

Se tiene que $f(x,y) = 1 + x - y$ entonces $F(x) = f(x,x^2) = 1 + x - x^2 \Rightarrow y = 1 + x - x^2$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Ahora completamos cuadrados se tiene $y-\frac{5}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ que nos representa una parábola de vértice $V\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$ cuya grafica es:



EJEMPLO 4. Hallar el valor de la función $z=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$ en los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=R^2$

Como $z=f(x,y)=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{1-\left(x^2+y^2\right)}$. Como $x^2+y^2=R^2$ entonces $z=f(x,y)=\frac{R^4}{1-R^2}$.

FUNCIONES DE N VARIABLES

La función $h=f(x_1,x_2,...,x_n)$ la definimos como una función $f:R^n\to R$ de conjuntos de puntos donde $\left\{(p,h)/h=f(x_1,x_2,....,x_n y),P\in R^n\wedge h\in R\right\}$

$$f:\quad R^n \quad\to\quad R^m$$
$$(x_1,x_2,...,x_n)\to f(x_1,x_2,...,x_n)$$

Donde $f_1(x_1,x_2,...,x_n)$ se puede ver como:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,...,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n) \\ ... \\ f_m(x_1,x_2,...,x_n) \end{pmatrix}$$

Donde hay m funciones del tipo: $f_i:R^n\to R$

NOTA: Gráficamente no se puede representar una función de n variable.

EJEMPLO 5.

$$f:R^3 \quad\to\quad R^2$$
$$(x,y,z)\;\to\; f(x,y,z)=(x^2+y^3,z^2y)$$

Donde $f(x,y,z)$ podía haberse escrito como "vector columna":

$$f(x,y,z)=f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x^2+y^3 \\ z^2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^3 \\ x_3^2x_2 \end{pmatrix}$$

DOMINIO Y RANGO

El conjunto de parejas ordenadas para las cuales la regla de correspondencia da un número real se llama dominio de la función. El conjunto de valores *z* que corresponden a los pares ordenados se llama imagen o rango.

FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $z = f(x,y)$ y $\{(p,z)/z = f(x,y), P \in R^2 \wedge z \in R\}$

$df = \{(x,y) \in R^2 / \exists f(x,y) \wedge z \in R\}$

$Rf = \{z \in R / z = f(x,y) \wedge (x,y) \in R^2\}$

FUNCIÓN DE N VARIABLES

Sea $h = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $\{(p,h)/h = (x_1, x_2, ..., x_n), P \in R^n \wedge h \in R\}$

$df = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n / \exists f(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge h \in R\}$

$Rf = \{h \in R / h = (x_1, x_2, ..., x_n) \wedge (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n\}$

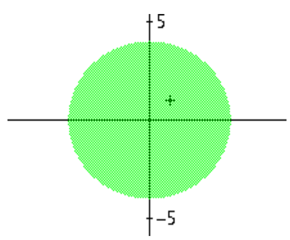
Normalmente no se específica cual es el dominio de la función. Cuando éste es el caso tenemos que considerar **el dominio implícito.** El dominio implícito de una función de dos variables es el conjunto más amplio de (x,y) donde tiene sentido evaluar la fórmula, y el resultado es un número real. Muchas veces este dominio se representa gráficamente. En el caso de dos variables la representación es una región en el plano.

Definición.- Sea *f* una función de dos variables. La gráfica de la función *f* es el conjunto de todos los puntos de la forma (x,y,z) donde $z = f(x,y)$ y $(x,y) \in Domf$

EJEMPLO 6. Sea la función $z = f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ Determine: a) Dominio de la función, b) Rango de la función

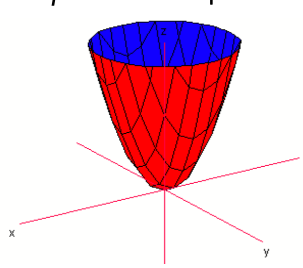
a) Claramente el dominio es $Df = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 16\}$, es decir, un disco cerrado con centro en el origen y radio 4.

b) $Rf\,[0,4]$



EJEMPLO 7. Hallar el dominio de la función $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ Grafique

Como es una función polinómica el Df es todo el plano xy

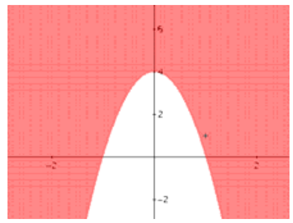


Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 8. Sea la función definida por $f(x,y)=\sqrt{y+4x^2-4}$ a) Hallar el dominio, b) Represéntelo gráficamente

a) La función está bien definida y es un número real cuando el radicando es mayor o igual a cero, esto es: $Df=\{(x,y)/\,y+4x^2\geq 4\}$

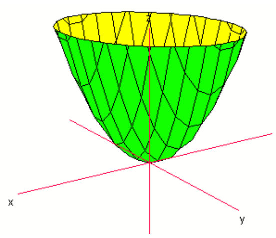
b) Este conjunto se puede representar en el plano. Es una región del plano limitada por la curva $y+4x^2-4=0$ Es claro que nuestra región es el conjunto de puntos (x,y) que satisface la desigualdad $y+4x^2\geq 4$ Este conjunto lo podemos ver como la unión de todas las curvas que están por encima de ésta. En el gráfico de todas estas curvas podemos visualizar el dominio de la función



Para demostrar la solución evaluamos la desigualdad tomando un punto, si satisface la desigualdad entonces la región que contiene el punto de prueba es el conjunto solución, si no satisface la desigualdad entonces el conjunto solución a la desigualdad es la otra región.

EJEMPLO 9. Sea la función definida por $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ Hallar el dominio y grafique

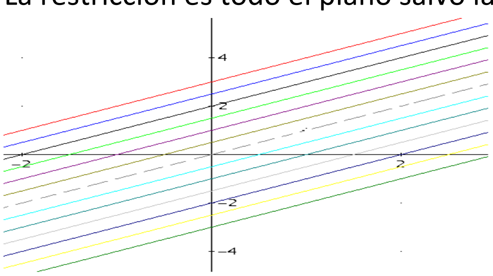
El Df está definido por todo el plano xy

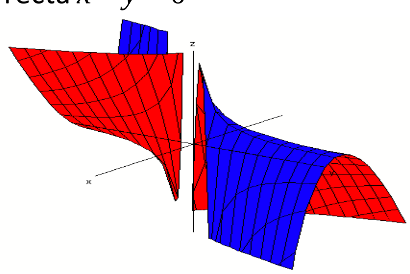


EJEMPLO 10. Sea la función definida por la relación $f(x,y)=\dfrac{3x^2+5x}{x-y}$ determine el dominio y grafique el dominio y la función.

Para que la función esté bien definida y sea un número real se tiene que cumplir que $x-y\neq 0\Rightarrow Df=\{\forall(x,y)\in R^2/\,x-y\neq 0\}$

La restricción es todo el plano salvo la recta $x-y=0$

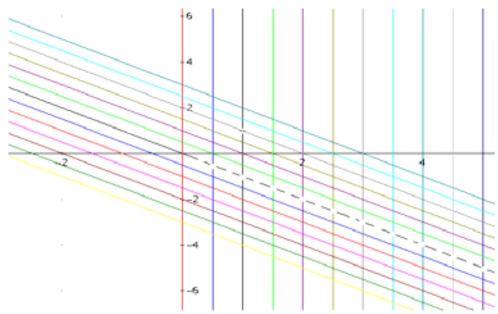




EJEMPLO 11. Encuentre el dominio de la siguiente función y represéntelo gráficamente. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+y}$

Para que la función esté bien definida y sea un número real se tiene que cumplir que:
$x+y\neq 0\wedge x\geq 0\Rightarrow Df=\{(x,y)/x+y\neq 0\wedge x\geq 0\}$

La primera restricción representa todo el plano salvo la recta $x+y=0$, la segunda restricción es el semiplano donde la variable *x* es no negativa, (semiplano a la derecha del eje *x)*. Buscamos la intersección de estos dos subconjuntos de $\Re^2$ para determinar el dominio de la función.



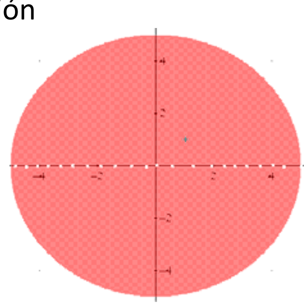
EJEMPLO 12. Sea la función definida por la relación $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{y}$ Determine:

a) El dominio de la función, b) Grafica del dominio

Parte a) Para que la función esté bien definida y sea un número real se tiene que cumplir que:
$y\neq 0\wedge 25-x^2-y^2\geq 0$

$$Df=\left\{(x,y)\in R^2/\,f(x,y)=\frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{y}\wedge y\neq 0\wedge 25-x^2-y^2\geq 0\wedge f(x,y)\in R\right\}$$

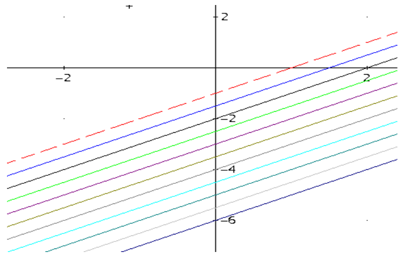
La primera restricción representa todo el plano salvo la recta $y=0$, la segunda restricción es $25-x^2-y^2\geq 0$. Buscamos la intersección de estos dos subconjuntos de $\Re^2$ para determinar el dominio de la función



EJEMPLO 13. Encuentre el dominio de la siguiente función y represéntelo gráficamente. $f(x,y)=Ln(4-2y+x)$

Para que la función esté bien definida y sea un número real se tiene que cumplir que:
$4-2y+x>0$ entonces: $Df=\{\forall(x,y)\in R^2/4-2y+x>0\}$

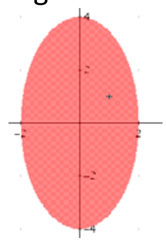
La representación gráfica de esta región del plano es un semiplano por ser una desigualdad lineal. Para determinar el semiplano rápidamente, primero graficamos la recta, punteada pues los puntos sobre la recta no satisface la desigualdad.



Recuerde la forma de comprobar la solución tomando un punto de prueba fuera de la recta, si este punto satisface la desigualdad el semiplano es donde está este punto, en caso que no se cumpla la desigualdad el conjunto solución es el otro semiplano.

EJEMPLO 14. Encontrar el dominio de la siguiente función $f(x,y)=\sqrt{16-4x^2-y^2}$

La función f está definida en todos los puntos $(x,y)/4x^2+y^2\leq 16$. Es decir, el conjunto del dominio está definido por todos los puntos del interior de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ incluyendo la frontera como muestra la figura.



CURVAS DE NIVEL.

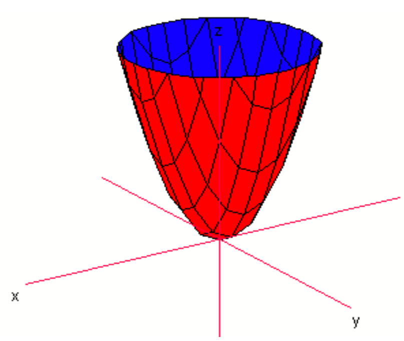
Son el conjunto de puntos del dominio donde la función es constante. Son las proyecciones de las curvas de altura constante de la gráfica de la función sobre el plano (x,y)

Una curva de nivel es la intersección entre la superficie $z=f(x,y)$ y el plano $z=k$ es decir $C_{nivel}=\{(x,y)\in R^2 / f(x,y)=k\}$

Las curvas de nivel de una función son de la forma $f(x,y)=k$. Un camino para representar estas curvas sería ir dando valores a *k* y para cada uno de ellos representar la ecuación $f(x,y)=k$

EJEMPLO 15. Dada la función, $f(x,y)=x^2+y^2$ se pide: (a) dibujar su gráfica (b) construir sus curvas de nivel, cuando *k* va desde 1 hasta 5.

Parte a:

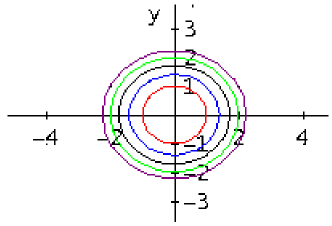


Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

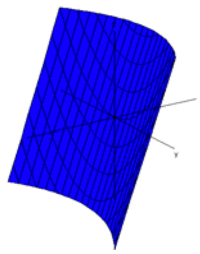
Parte b: Las curvas de nivel de esta función son de la forma $f(x,y)=k$. Para cada uno de ellos representar la ecuación cuando *k* va desde 1 hasta 5.

$x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=2; x^2+y^2=3; x^2+y^2=4; x^2+y^2=5$.

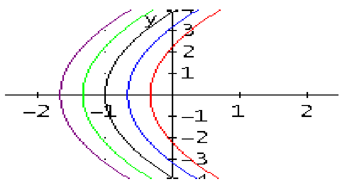
Obtenemos las gráficas de esas 5 curvas de nivel:



EJEMPLO 16. Dada la función, $f(x,y)=\dfrac{y^2}{5}-3x$ Determine: (a) Gráfica; (b) construir sus curvas de nivel.

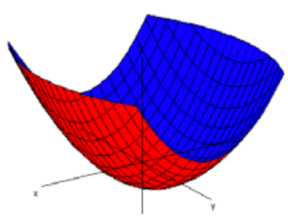


$$3x-0.2y^2=-1;\ 3x-0.2y^2=-2; 3x-0.2y^2=-3; 3x-0.2y^2=-4; 3x-0.2y^2=-5$$

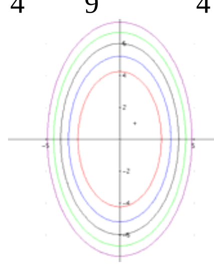


Son parábolas paralelas abiertas hacia la derecha.

EJEMPLO 17. Dada la función, $f(x,y)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1$ Determine: (a) Gráfica; (b) construir sus curvas de nivel.



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=3; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=5; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=6$$



Se puede observar que cuando trazamos la gráfica en el plano (x,y) todas las trazas en los planos paralelos son elipses congruentes.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1) Determinar $f(x)$ si $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y},(xy>0)$

2) Hallar $f(x,y)$ si $f(x+y,x-y)=xy+y^2$

3) Sea $z=x\,f\left(\frac{y}{x}\right)$. Determinar las funciones f y z, si $z=\sqrt{1+y^2}$, para $x=1$.

Determine el dominio de f (recuerde que para las gráficas se utiliza curvas punteadas para indicar cualquier parte de la frontera que no pertenezca al dominio y curvas continuas para indicar las partes de la frontera que pertenezcan al dominio.

$4)\ f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$; $5)\ f(x,y)=\frac{4}{4-x^2-y^2}$; $6)\ f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$7)\ f(x,y)=\sqrt{16-x^2-4y^2}$; $8)\ f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2-1}$; $9)\ f(x,y)=\sqrt{x^2-4y^2+16}$

$10)\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$; $11)\ f(x,y)=\sqrt{x^2+4y^2-16}$; $12)\ f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$13)\ f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2-4y^2}}$; $14)\ f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$; $15)\ f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

$16)\ f(x,y)=\sqrt{sen\left(x^2+y^2\right)}$; $17)\ f(x,y)=\ln(x+y)$; $18)\ f(x,y)=\ln\left(x^2+y\right)$

$19)\ f(x,y)=\ln(xy-1)$; $20)\ f(x,y)=\sqrt{y\,sen\,x}$; $21)\ f(x,y)=\sec(x-y)$

$22)\ f(x,y)=x+\operatorname{arccos} y$; $23)\ f(x,y)=arcsen(x+y)$; $24)\ f(x.y)=arctg\left(\frac{x-y}{1+x^2y^2}\right)$

$25)\ f(x,y)=1+\sqrt{-(x-y)^2}$; $26)\ f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$

$27)\ f(x,y)=\sqrt{\left(x^2+y^2-a^2\right)\left(2a^2-x^2-y^2\right)},(a>0)$; $28)\ f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$

$29)\ f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$; $30)\ f(x,y)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y}$

Hallar el dominio de las siguientes funciones de tres argumentos.

$31)\ f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{x-y-z}$; $32)\ f(x,y,z)=\frac{z}{x^2-y}$; $33)\ f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

$34)\ f(x,y,z)=\ln(xyz)$; $35)\ f(x,y,z)=arcsenx+arcsen\,y+arcsen\,z$

$36)\ f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$; $37)\ f(x,y,z)=\sqrt{16-x^2-4y^2-z^2}$

$38)\ f(x,y,z)=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$; $39)\ f(x,y,z)=\ln x+\ln y+\ln z$;

$40)\ f(x,y,z)=\ln\left(4-x^2-y^2\right)+|z|$; $41)\ f(x,y,z)=xzarc\cos\left(y^2-1\right)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Determine dominio y curvas de nivel en las siguientes funciones

42) $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$; 43) $f(x,y)=6-2x+2y$; 44) $f(x,y)=16-x^2-y^2$

45) $f(x,y)=x^2-y^2$; 46) $f(x,y)=144-9x^2-16y^2$; 47) $f(x,y)=4x^2+9y^2$

48) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

49) $f(x,y)=e^{xy}$ Para $1,2,e,4,\frac{1}{2},e^{-1}$ y $\frac{1}{4}$.

50) $f(x,y)=\ln xy$ Para $0,1,2,4,-1,-2$ y -4.

51) $z=x+y$; 52) $z=x^2+y^2$; 53) $z=x^2-y^2$; 54) $z=\sqrt{xy}$; 55) $z=(1+x+y)^2$

56) $z=1-|x|-|y|$; 57) $z=\dfrac{y}{x^2}$; 58) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$; 59) $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$; 60) $z=\ln(x^2+y)$

61) $z=arcsen(xy)$; 62) $u=x+y+z$; 63) $u=x^2+y^2+z^2$

64) Se elabora una caja rectangular cerrada con tres tipos de materiales de modo que contenga un volumen 16 pie^3. El material para la tapa y el fondo cuesta \$0.18 por pie cuadrado, el material para las partes delantera y trasera cuesta \$0.16 por pie cuadrado, y el material para las otras dos caras cuesta \$0.12 por pie cuadrado. a) Obtenga un modelo matemático que exprese el costo total del material como una función de las dimensiones las partes delantera y trasera. Determine el dominio de la función. b) ¿Cuál es el costo del material si las dimensiones de las partes delantera y trasera son 2 pie y 4 pie, donde 4 pie es la altura de la caja?

65) Se elabora una caja rectangular sin tapa con un costo de material de \$10. El material para el fondo cuesta \$0.15 por pie cuadrado. a) Obtenga un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de las dimensiones del fondo. Determine el dominio de la función. b) ¿Cuál es volumen de la caja si el fondo es un cuadrado cuyo lado mide 3 pie?

66) Un sólido rectangular del primer octante, con tres caras en los ejes planos coordenados, tiene un vértice en el origen y el vértice opuesto en el punto (x,y,z) en el plano $x+3y+2z=6$. a) Obtenga un modelo matemático que exprese el volumen del sólido como una función de las dimensiones de la base. Determine el dominio de la función. b) ¿Cuál es el volumen si la base es un cuadrado de lado 1.25 unidades?

67) El potencial eléctrico en un punto (x,y) es $V(x,y)$ volts y $V(x,y)=\dfrac{4}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

Dibuje las curvas equipotenciales de V para $16,12,8$ y 4.

68) La función de producción f para cierto artículo está definida por $f(x,y)=4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, donde x y y son las cantidades de dos insumos. Dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constantes para $16,12,8,4$ y 2.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

69) Suponga que f es la función de producción de cierto artículo, donde $f(x,y)$ unidades se producen cuando se emplean x máquinas y y horas – persona están disponibles. Si $f(x,y)=6xy$, dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constante para $30, 24, 18, 12, 6$

70) $T(x,y)$ grados es la temperatura en un punto (x,y) de una placa metálica plana, donde $T(x,y)=4x^2+2y^2$. Dibuje un mapa de contornos de T que muestre las isotermas para $12, 18, 4, 1$ y 0.

71) La presión de un gas en el punto (x,y,z) del espacio tridimensional es $P(x,y,z)$ atmósferas, donde $P(x,y,z)=4e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$. Describa las superficies de nivel, denominadas superficies isobáricas, de P para $4, 3, 2, 1$.

.

72) El potencial eléctrico en un punto (x,y,z) del espacio tridimensional es $V(x,y,z)$ volts, donde $V(x,y,z)=\dfrac{8}{\sqrt{16x^2+4y^2+z^2}}$. Las superficies de nivel de V se llaman superficies equipotenciales. Describa estas superficies para $4, 2, 1$.

73) Una lata de refresco se construye con una envolvente lateral de hojalata, y con tapa de aluminio. Dado que el costo de la tapa es de 20 Bs F por unidad cuadrada, 10 Bs F por unidad cuadrada para la base, y de 30 Bs F por unidad cuadrada del envolvente. Construya la función de costo en función del radio r y la altura h.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas