LÍMITES Y CONTINUIDAD

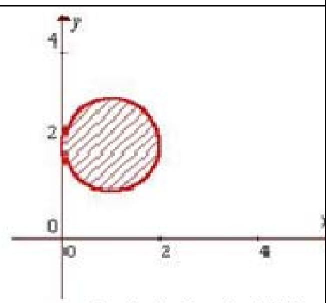
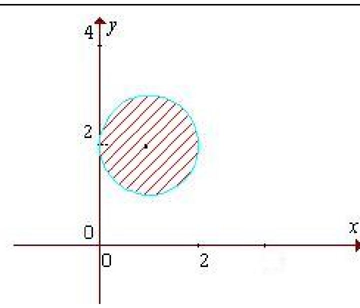
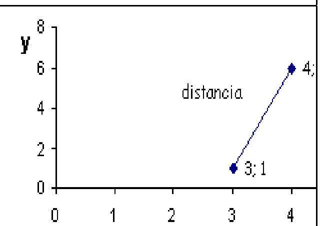
La definición de límite para funciones de varias variables es similar a aquélla para funciones de una variable, pero con la salvedad de que los entornos tomados alrededor del punto donde queremos encontrar el límite serán ahora discos o bolas, de acuerdo a la dimensión del espacio de las variables
Mientras que en funciones de una variable hay sólo dos maneras de acercarnos a un punto del dominio (por derecha y por izquierda), en funciones de varias variables hay infinitos caminos para acercarse a un punto del plano de las variables. Para que exista un límite, el mismo debe ser igual para todos los posibles acercamientos.
Igual que en funciones de una variable, para que una función de varias variables sea continua en un punto debe estar definida en el mismo, debe tener límite en él y el valor de la función debe ser igual al del límite. Si una función es combinación de otras continuas, será también continua excepto en aquellos puntos donde no esté definida.

ENTORNO EN EL PLANO

Ante todo recordaremos que entorno en una dimensión es una porción de la recta alrededor de un punto x_0, que puede ser abierta "Entorno abierto" o cerrada "Entorno cerrado".

Entorno abierto	Entorno cerrado	Distancia entre dos puntos
(a,b)	$[a,b]$	$d=\|a-b\|$

En dos dimensiones o variables **entorno** se refiere a una porción de plano en lugar de una recta. Esta porción es un disco alrededor de un punto (x_0, y_0) de radio δ.

Entorno abierto	Entorno cerrado	Distancia entre dos puntos
$\left\{(x,y)/\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+k}\right\}$	$\left\{(x,y)/\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+k}\right\}$	$d=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$
 Entorno cerrado alrededor de (1,2) de r	 Entorno abierto alrededor del (1,2) de radio 1	

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Basándonos en lo que hemos aprendido en el cálculo de una variable, está bastante claro lo que queremos decir cuando escribimos $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$

Cuando decimos que el límite de *f* en (x_0,y_0) es *L*, estamos diciendo que si se calcula *f* en un punto (*x, y*) cercano a (x_0,y_0), se obtendrá un valor que tal vez no sea *L*, pero que estará muy cerca de *L*. Estará tanto más cerca, cuanto más acerquemos (*x, y*) a (x_0, y_0).

Como puede verse, en esta descripción del límite la idea central es la de distancia. Y además es preciso señalar que no hay ninguna diferencia entre esta idea de límite y la que se utiliza en funciones de una variable.

DEFINICIÓN: Sea $z=(x,y)$ una función de dos variables definida en un entorno centrado en (a,b) y sea $L \in R$ entonces se define límite de una función y se denota

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L, \qquad si\,\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0/\left|f(x,y)-L\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|(x,a)-(a,b)<\delta\right|$$

Para demostrar la existencia de límites mediante la definición anterior es conveniente recordar las siguientes relaciones:

$1.|x_0+y_0|\le|x_0|+|y_0|$

$2.|x_0-y_0|\le|x_0|+|y_0|$

$3.|x-x_0|\le\sqrt{(x-x_0)^2+)(y-y_0)^2}$

$4.|y-y_0|\le\sqrt{(x-x_0)^2+)(y-y_0)^2}$

Las propiedades de los límites con respecto a la suma, resta, producto y cociente son las mismas que para una variable.

EJEMPLO 1. Pruebe que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3x+y=5$ aplicando la definición

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} 3x+y=5 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\|(x,y)-(1,2)\|<\delta \Rightarrow \|(3x+y)-5\|<\varepsilon$$

$\|(x,y)-(1,2)\|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ y las propiedades (3) y (4):

$\|x-1\|\le\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \Rightarrow \|x-1\|<\delta$

$\|y-2\|\le\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta \Rightarrow \|y-2\|<\delta$

$\|(3x+y)-5\|=\|3x+y-3-2\|\le\|3x-3\|+\|y-2\|\le3\delta+\delta=4\delta$

Entonces $\|(3x+y)-5\|<\varepsilon$ si $4\delta<\varepsilon$ basta tomar $\delta<\dfrac{\varepsilon}{4}$

EJEMPLO 2. Pruebe que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{2x^2+2y^2}=0$ aplicando la definición.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2+2y^2}=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow \left\|\frac{x^2y}{2x^2+2y^2}-0\right\|<\varepsilon$$

$\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

$\|x-o\|\le\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \|x^2\|\le x^2+y^2$

$\|y-o\|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \|y\|<\delta$ Luego

$$\left\|\frac{x^2y}{2x^2+2y^2}-0\right\|=\frac{\|x^2y\|}{\|2x^2+2y^2\|}=\frac{\|x^2\|\|y\|}{2(x^2+y^2)}\le\frac{(x^2+y^2)\|y\|}{2(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}\|y\|<\frac{1}{2}\delta;\ basta\ \ tomar \quad \delta<2\varepsilon$$

La demostración de que el límite de una función en un punto existe y además calcularlo, no siempre es una tarea fácil. Por otro lado, utilizar la definición para determinar la validez de un límite puede ser, muchas veces, difícil y engorroso. A veces es posible encontrar algún método alternativo que permita calcular el límite de forma directa.

EJEMPLO 3. Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\sqrt{x^2+y^2}\,sen\left[\frac{1}{x^2-y^2}\right]\right]=0$$

Tenemos que demostrar la siguiente implicación

$$(x-0)^2+(y-0)^2<\delta^2 \to \left|f(x,y)-0\right|<\varepsilon$$

Es decir, tenemos que encontrar un valor para δ tal que, cuando $x^2+y^2<\delta^2$, se tenga que $\left|f(x,y)-0\right|<\varepsilon$

Para ello partimos de la expresión $\left|f(x,y)\right|$ y vemos cuánto tiene que valer δ para que esa expresión sea menor que ε , teniendo en cuenta que al estar en un entorno del origen es $x^2+y^2<\delta^2$, o bien $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

$$\left|f(x,y)\right|=\left|\sqrt{x^2+y^2}\,sen\left[\frac{1}{x^2-y^2}\right]\right|\le\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$ Luego hemos encontrado un valor para δ, el propio de ε.

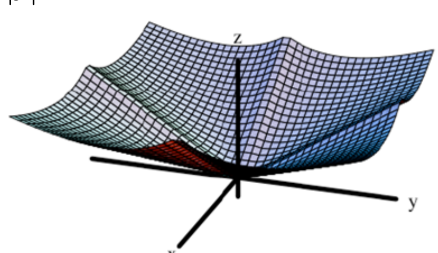
EJEMPLO 4. Demostrar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0;0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}<\varepsilon$$

$$|x|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta,|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\le\frac{x^2+y^2+2|x||y|}{|x|+|y|}=\frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}=|x|+|y|<2\delta$$

Basta elegir $\delta=\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}<\varepsilon$



TEOREMA DEL SÁNDWICH: Llamado también teorema de encaje, teorema de intercalación, teorema de estricción, teorema del enclaustramiento, teorema del acotamiento, teorema de compresión, , teorema del ladrón y los dos policías(Rusia), o teorema de comparación, es un teorema usado en la determinación del límite de una función. Este teorema enuncia que si dos funciones tienden al mismo límite en un punto, cualquier otra función que pueda ser acotada entre las dos anteriores tendrá el mismo límite en el punto.

El teorema o criterio del sándwich es muy importante en demostraciones de cálculo y es frecuentemente utilizado para encontrar el límite de una función a través de la comparación con otras dos funciones de límite conocido o fácilmente calculable.

EJEMPLO 5. Demostrar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4}=0$

Porque $y^4 \le x^4+y^4$, cuando $0\le \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4}\le x^2$. Porque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2=0$, entonces por el teorema de compresión $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4}=0$.

EJEMPLO 6. Demostrar que el siguiente límite existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{sen(xy)}{x}$

Para comprobar que el límite existe se aplica el teorema de la función intermedia (el teorema o criterio del sándwich)

$$y\cos(xy)\le \frac{sen(xy)}{x}\le y,\ si\, x>0; \quad y\le \frac{sen(xy)}{x}\le y\cos(xy),\ si\, x<0$$

Las dos funciones de los extremos tienen límite 2 cuando $(x,y)\to(0,2)$ por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen(xy)}{x}=2$$

OPERACIONES CON LÍMITES

Hay una serie de teoremas que simplifican el análisis de los límites de funciones de dos variables.

TEOREMAS:

Sean L, M y K números reales y $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M$

1) Teorema de Suma: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)+g(x,y)\right]=L+M$

2) Teorema de la Diferencia: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)-g(x,y)\right]=L-M$

3) Teorema del Producto: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[(f(x,y))(g(x,y))\right]=LM$

4) Teorema de Multiplicación por una Constante: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} k\left[f(x,y)\right]=kL$

(K es cualquier número)

5) Teorema del Cociente: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\dfrac{L}{M};\ M\ne 0$

6) Teorema de la Potencia: si r y s son enteros no comunes, y $s\ne 0$, entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)\right]^{\frac{r}{s}}=L^{\frac{r}{s}}$$

Siempre que $L^{\frac{r}{s}}$ sea un número real.

Para calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ se reemplaza a y b en la función y si no es una indeterminación el resultado obtenido es el límite. En caso de existir una indeterminación se trata de salvarla para poder encontrar el límite.

EJEMPLO 7. Calcular el $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (x+3y^2)$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (x+3y^2)=\left(2+3(1)^2\right)=5$$

EJEMPLO 8. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ \cos(\frac{1}{xy})$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ \cos(\tfrac{1}{xy}) = 0$$

Este límite es igual a cero, ya que es una función acotada $\cos(t)$ por una función que tiende a cero.

EJEMPLO 9. Hallar el límite si existe $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \log\left|1+x^2y^2\right|$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \log\left|1+x^2y^2\right| = \log\left|1+1\right| = 2$$

EJEMPLO 10. Hallar el límite si existe $\lim_{(x,y)\to(0.\frac{\pi}{2})} (\sec x)(tgy)$

Este límite no existe. Si lo consideramos sobre $y<\dfrac{\pi}{2}$ el límite $\lim_{(x,y)\to(0.\frac{\pi}{2})} (\sec x)(tgy) = x$ y si lo consideramos sobre $y>\dfrac{\pi}{2}$ el límite $\lim_{(x,y)\to(0.\frac{\pi}{2})} (\sec x)(tgy) = -x$

EJEMPLO 11. Hallar el límite si existe $\lim_{(x,y)\to(0.0)} \cos\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y+1}\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0.0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = \cos\left(\frac{0}{1}\right) = 1$$

En muchos casos se necesitan algunos límites notables de una variable para resolver límites de dos variables.

$1)\lim_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)=1$ $\quad 2)\lim_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}\right)=Ln(a)$ $\quad 3)\lim_{x\to0} sen(x)=0$

$4)\lim_{x\to0} sen(kx)=0$ $\quad 5)\lim_{x\to0}\cos(x)=1$ $\quad 6)\lim_{x\to0}\cos(kx)=1$

$7)\lim_{x\to0}[1-\cos(x)]=\lim_{x\to0}[\cos(x)-1]=0$

$8)\lim_{x\to0}[1-\cos(kx)]=\lim_{x\to0}[\cos(kx)-1]=0$

$9)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{sen(x)}{x}\right]=1$ $\quad 10)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{x}{sen(x)}\right]=1$ $\quad 11)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{sen(kx)}{x}\right]=k$

$12)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{1-\cos(x)}{x}\right]=0$ $\quad 13)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{1-\cos(kx)}{x}\right]=0$ $\quad 14)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\right]=\dfrac{1}{2}$

$15)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{1-\cos(kx)}{x^2}\right]=\dfrac{k^2}{2}$ $\quad 16)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{tg(kx)}{x^2}\right]=k$

$17)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{sen(k_1x)}{sen(k_2x)}\right]=\dfrac{k_1}{k_2}$ $\quad 18)\lim_{x\to0}\left[\dfrac{tg(k_1x)}{tg(k_2x)}\right]=\dfrac{k_1}{k_2}$

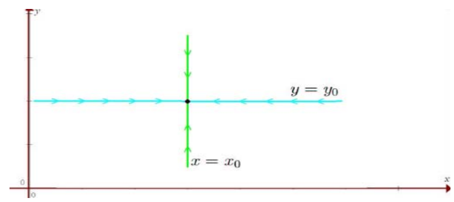
TEOREMA (LÍMITES SUCESIVOS O ITERADOS)

Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \Rightarrow \lim_{x\to a,}\lim_{y\to b,} f(x,y)=\lim_{y\to b,}\lim_{x\to a,} f(x,y)=L$

Debemos recordar, para saber si una función de dos variables tiene límite no basta con saber el límite por derecha y por izquierda, sino tiene que tener límite en todas las direcciones y ser igual, además que una sola coincidencia entre límites por distintos acercamientos no garantiza nada; por el contrario, un solo caso de límite distinto prueba que no existe el límite.

LÍMITES POR TRAYECTORIAS

Para estudiar la función $f(x,y)$ fijábamos una de las variables, haciendo por ejemplo $y = y_0$ y estudiábamos la función $f(x, y_0)$, que depende únicamente de la variable *x*. Este proceso se puede entender geométricamente así: hemos elegido acercarnos al punto (x_0, y_0) a lo largo de la recta $y = y_0$ del plano (x, y). De la misma forma, si consideramos la función $f(x_0, y)$ entonces podemos acercarnos al punto (x_0, y_0) a lo largo de la recta $x = x_0$. En la siguiente figura se ilustran estas dos formas de acercarnos al punto que nos interesa, por rectas verticales y horizontales.



Normalmente, se suelen calcular a ese efecto los **límites radiales**, en los cuales se determina el límite por líneas rectas oblicuas que convergen al punto en análisis.
Ejemplo, si el punto de análisis es $(0,0)$ tomamos otros caminos diferentes que pase por el punto $(0,0)$; $y = x; y = x^2$ o también líneas rectas que convergen al origen son de la forma: $y = mx$

TEOREMA: Para estudiar el $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y)$ se puede estudiar el límite a lo largo de las rectas $y = mx$ que pasan por el origen; es decir, estudiamos: $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx)$ donde m es un parámetro. Si para algún valor de m, este límite no existe, o si el valor del límite depende de cuál sea el m empleado, entonces podemos asegurar que no existe el límite de f en $(0,0)$

REGLA DE LAS DOS TRAYECTORIAS

Si dos trayectorias que llevan a un punto $p(a,b)$ producen dos valores límites diferentes para f, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe.

EJEMPLO 12. Demostrar que el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$ no existe

Para probar que este límite no existe vamos a ir por dos direcciones distintas

$(x,0) \to (0,0)$ $y\,(x,x) \to (0,0)$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2}\right)^2 = 1 \qquad \lim_{(x,x)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2}\right)^2 = 0$$

Por tanto el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ no existe ya que en la dirección de $y=0$; $y=x$ el límite es distinto.

EJEMPLO 13. ¿Existe $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{\operatorname{sen}2x-2x+y}{x^3+y}$?

Examinaremos este límite doble acercándonos al origen a través de dos caminos: por el eje *x* y por el eje *y*.
Por el eje *x*:

$$\lim_{(x;0)\to(0;0)}\frac{\operatorname{sen}2x-2x+0}{x^3+0}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}2x-2x}{x^3}=-\frac{4}{3}$$ (Resultado obtenido aplicando L´Hospital).

Por el eje *y*:

$$\lim_{(0;y)\to(0;0)}\frac{\operatorname{sen}2\cdot0-2\cdot0+y}{0^3+y}=\lim_{y\to0}\frac{y}{y}=1$$

Los límites a través de acercamientos diferentes son distintos, y por ende no existe el límite.

EJEMPLO 14. Calcular $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

En este caso, si bien las funciones del numerador y el denominador son ambas continuas, el cociente entre ambas no está definido en el origen. Para tratar de ver si existe un límite, analizaremos primero los acercamientos por los ejes.
Por el eje *x*:

$$\lim_{(x;0)\to(0;0)}\frac{(x-0)^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Por el eje *y*:

$$\lim_{(0;y)\to(0;0)}\frac{(0-y)^2}{0^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{(-y)^2}{y^2}=1$$

Ahora conviene analizar otros acercamientos al origen.
En este caso, las líneas rectas que convergen al origen son de la forma: $y=mx$
Determinemos, pues, los límites acercándonos por estos caminos:

$$\lim_{(x;mx)\to(0;0)}\frac{(x-mx)^2}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{[x(1-m)]^2}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1-m)^2}{x^2(1+m^2)}=\frac{(1-m)^2}{(1+m^2)}$$

Este último valor depende de *m*; por lo tanto variará de acuerdo al camino de acercamiento al origen. Como los límites no son todos iguales para todos los acercamientos, se concluye que no existe el límite.

EJEMPLO 15. Calcular $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Primero calculemos los límites radiales.

$$\lim_{(x;mx)\to(0;0)}\frac{xmx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}}=\lim_{x\to0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}=\lim_{x\to0}\frac{mx^2}{|x|\sqrt{(1+m^2)}}=\lim_{x\to0}\frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}}|x|=0$$

Dan todos lo mismo. Se sugiere al lector calcular otros límites por otros caminos y comprobar que también dan 0.

EJEMPLO 16. Calcular $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2y^2}$

Tomemos el camino $y = x$ que pasa por el origen

$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2y^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ Tomamos otro camino que pase por el origen $y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+x^2}{x^2+x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x+x^3} = 0 \therefore \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$$

Ahora se puede aplicar la definición de limite y se demuestra que si existe $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$.

EJEMPLO 17. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen(xy)}{x}$

$$\lim_{y\to2}\left(\lim_{x\to0} \frac{sen(xy)}{x}\right) = \lim_{y\to2} y = 2; \quad \lim_{x\to o}\left(\lim_{y\to2} \frac{sen(xy)}{x}\right) = \lim_{x\to0} \frac{sen(2x)}{x} = 2$$

La demostración de la existencia del límite se realizó en el ejercicio # 6

LÍMITES Y COORDENADAS POLARES.

Cambio a coordenadas polares en $\Re^2$

Supongamos que tenemos una función $f : \Re^2 \to \Re$ para la que planteamos el límite en un punto (a,b). Para hacer el límite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ podemos probar haciendo el "cambio de variable" $x = a + r\cos\theta; \quad y = b + rsen\theta$. El caso más sencillo y el que más habitualmente vamos a utilizar es cuando $a = 0, b = 0$, es decir, cuando estamos con el punto $(0,0)$, donde el cambio de variable queda $x = r\cos\theta; \quad y = rsen\theta; r > 0; \theta \in [0, 2\pi]$

La geometría de las coordenadas polares *r* representa la distancia del punto (x, y) al origen. Por esa razón, si *r* tiende a 0 el punto de coordenadas (r,θ) se aproxima al origen.

Esa es la idea que nos lleva a proponer el siguiente método para analizar un límite en el origen.

PROPOSICIÓN: Supongamos existe el que $\lim_{r\to0} f(a + r\cos\theta, b + rsen\theta) = L$ y no depende de $\theta \in [0, 2\pi[$. Si existe una función real de una variable real F cumpliendo que $\lim_{r\to0} F(r) = 0$ y de modo que $|f(a + r\cos\theta, b + rsen\theta) - L| \le F(r)$ para todo *r* y para todo $\theta \in [0, 2\pi[$ entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$

EJEMPLO 18. Sea $f : R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = \frac{x^3 + x^2 - 2y^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ en el punto $(0,0)$ Determine cambiando a coordenadas polares el límite de esa función

$$\lim_{r\to0} f(r\cos\theta, rsen\theta) = \lim_{r\to0}\left[\frac{r^3\cos^3\theta - 2r^3sen^3\theta + r^2\cos^2\theta + r^2sen^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2sen^2\theta}\right]$$

$$\lim_{r\to0}\left[\frac{r^2(r\cos^3\theta - 2rsen^3\theta + \cos^2\theta + sen^2\theta}{r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)}\right] = \lim_{r\to0}\left[\frac{r\cos^3\theta - 2rsen^3\theta + 1}{1}\right] = \lim_{r\to0}(r\cos^3\theta - 2rsen^3\theta + 1) = 1$$

Para cualquier θ el límite es $\lim_{r\to 0} f(r,\theta)=L=1$ Ahora buscaremos una función $F(r)$ de modo que debe cumplir con $\lim_{r\to 0} F(r)=0$

$$\left|f(a+r\cos\theta,b+rsen\theta)-1\right|=\left|r(\cos^3\theta-2rsen^3\theta)\right|\leq\left|r\cos^3\theta\right|+\left|2rsen^3\theta)\right|\leq r+2r=3r$$

Ahora consideramos $F(r)=3r$ y se tiene que $\lim_{r\to 0} F(r)=\lim_{r\to 0} 3r=0$ y en efecto existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$

Lo interesante de esta idea es que de nuevo nos permite analizar el límite de dos variables mediante un límite en una sola variable.

OBSERVACIÓN: Si el límite $\lim_{x\to 0} F(r,\theta)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta,rsen\theta)$ no existe o depende de θ, podemos asegurar que f no tiene límite en (0,0).

La dificultad en el uso de las coordenadas polares estriba en que la recíproca no es cierta: aunque ese límite no dependa de θ, todavía puede ocurrir que el límite no exista, como muestra este ejemplo.

EJEMPLO 19. Sea $f:R^2\to R$ definida por $f(x,y)=\dfrac{2x^2+3y^2-2y^3}{x^2+y^2}$ Determine cambiando a coordenadas polares si el límite de esa función existe en el punto $(0,0)$

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta,rsen\theta)=\lim_{r\to 0}\left[\frac{2r^2\cos^2\theta+3r^2sen^2\theta-2r^3sen^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2sen^2\theta}\right]$$

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{r^2(2\cos^2\theta+3sen^2\theta-2rsen^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+sen^2\theta)}\right]=\lim_{r\to 0}(2\cos^2\theta+3sen^2\theta-2rsen^3\theta)=2\cos^2\theta+3sen^2\theta$$

Depende de θ, entonces no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

EJEMPLO 20. Estudiar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ mediante su cambio a coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos(\theta)sen(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+sen^2(\theta))}=\lim_{r\to 0}(\cos(\theta)sen(\theta))$$

En este caso, como no tiene la variable r, el valor del límite depende únicamente del valor de θ, (dirección de aproximación), por lo tanto este límite no existe

EJEMPLO 21. Comprobar la existencia del límite $\lim_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{x^3}{x^2+(y-1)^2}$ calculando el límite en coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^3}{x^2+(y-1)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+(rsen(\theta)-1)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta)-2rsen(\theta)+1}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+sen^2(\theta))-2rsen(\theta)+1}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3(\theta)}{r^2-2rsen(\theta)+1}=0$$

Sea $F(r)=r$

$$\left|\frac{r^3\cos^3(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+(rsen(\theta)-1)^2}-L\right|=\left|\frac{r^3\cos^3(\theta)}{r^2-2rsen(\theta)+1}-0\right|=\left|r^3\cos^3(\theta)\right|\leq r\to 0\Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^3}{x^2+(y-1)^2}=0$$

OBSERVACIÓN: También se puede utilizar la regla de **L' HÔPITAL,** para calcular límites en coordenadas polares.

EJEMPLO 22. Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{sen(x^2+y^2)}$.

El límite en coordenadas polares límite

$$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{e^{r^2(sen^2\theta+\cos^2\theta)}-1}{sen(r^2(sen^2\theta+\cos^2\theta))} = \lim_{r\to 0}\frac{e^{r^2}-1}{sen(r^2)} = \frac{0}{0}$$

Usamos la regla de L' Hôpital, dado que se trata de casos de "cero sobre cero".

$$\lim_{r\to 0}\frac{2re^{r^2}}{2r\cos(r^2)} = \lim_{r\to 0}\frac{e^{r^2}}{\cos(r^2)} = \frac{1}{1} = 1$$

TEOREMA. Supongamos que se puede descomponer la función $F(r,\theta)$ de esta forma: $F(r,\theta)=h(r)G(\theta)$ Donde además $\lim\limits_{r\to 0} h(r)=0$ Entonces $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x,y)=0$ sí y sólo si la función $G(\theta)$ está acotada en $[0,2\pi]$

EJEMPLO 23. Determine el límite de la función definida por $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{y} & si\, y\neq 0\\ 0 & si\, y=0\end{cases}$

$$f(r,\theta)=f(r\cos\theta, rsen\theta)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{rsen\theta} & si\,\theta\neq 0,\pi\\ 0 & si\,\theta=0,\pi\end{cases}$$

Podemos observar que para cada valor fijo del ángulo θ

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta)=\begin{cases}\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^2}{rsen\theta} & si\,\theta\neq 0,\pi\\ \lim\limits_{r\to 0} 0 & si\,\theta=0,\pi\end{cases}$$

Por tanto el límite en polares vale 0, independientemente del valor del ángulo θ. Podríamos pensar al llegar a esta conclusión que el límite vale cero. Sin embargo, si observamos la expresión que se ha obtenido:

$\dfrac{r^2}{rsen\theta}=\dfrac{r}{sen\theta}$ Nos daremos cuenta de que para valores del ángulo θ cercanos a 0, esta expresión no está acotada.

EJEMPLO 24. Determine el límite la función dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r,\theta)=\begin{cases}\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^3\cos^2(\theta)\text{sen}(\theta)}{r^2}; & si\,\theta\neq 0,\pi\\ \lim\limits_{r\to 0} 0 & si\,\theta=0,\pi\end{cases}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2(\theta)\text{sen}(\theta)}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\cos^2(\theta)\text{sen}(\theta)=0$$

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta)=\lim_{r\to 0} 0=0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

CONTINUIDAD

DEFINICIÓN: Se dice que una función de dos variables $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

$i)\ f(x_0, y_0)\ existe$

$ii)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ existe$

$iii)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

EJEMPLO 25. Determine si la función $f(x,y)$ es continua en (0, 0)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+2x^2+2y^2+y^4}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$i)\ f(0,0)=2$

$$ii)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+2x^2+2y^2+y^4}{x^2+y^2}=2$$

$$iii)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=2\ \therefore es\, continua$$

EJEMPLO 26. Estudiar la continuidad si la función $f(x,y)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & sí\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sí\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se realiza el estudio de la continuidad únicamente en el origen, utilizando el método de las trayectorias, donde resulta que los límites iterados son ambos iguales a cero, sin embargo, si utilizamos la trayectoria de la recta $y = mx$ obtenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,mx)=\lim_{x\to0}\frac{m^2x^4}{x^4(1+m^4)}=\frac{m^2}{(1+m^4)}$$

Se observa que este límite depende del valor de m, por lo tanto se deduce que no existe el límite de la función dada, y en consecuencia no es continua en el origen.

EJEMPLO 27. Estudiar la continuidad si la función $f(x,y)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x(x+y)} & sí\ \ x\neq0,\ x+y\neq0\\ 0 & en\ el\ resto\end{cases}$$

a) En los puntos (x_0, y_0) tales que $x_0 \neq 0,\ x_0 + y_0 \neq 0$ la función es evidentemente continua

b) En los puntos (x_0, y_0) tales que $x_0 = 0, ó\ x_0 + y_0 = 0$ (distinto del origen) la función no es continua, no existe el límite (el denominador es cero, pero el numerador no)

c) En el origen la función tampoco es continua, aplicado el teorema de las trayectorias observamos que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,mx)=\lim_{x\to0}\frac{m^2x^2}{x(x+xm)}=\frac{m^2x^2}{x^2(1+m)}=\frac{m^2}{(1+m)}$$

Podemos observar que el resultado depende del valor de m

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

TEOREMAS DE CONTINUIDAD PARA LAS FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Si $k \in R$ y $f(x,y), g(x,y)$ son funciones continuas en (a,b) entonces las siguientes funciones $h(x,y)$ son continuas en (a,b)

$$a)h(x,y) = kf(x,y)$$
$$b)h(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y)$$
$$c)h(x,y) = f(x,y)g(x,y)$$
$$d)h(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} si\ g(x,y) \neq 0$$

EJEMPLO 28. Estudiar la continuidad si la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+sen(x+y)}{x+y} & sí\ x+y\neq 0 \\ 0 & sí\ x+y=0 \end{cases}$

Escribimos la función como $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{sen(x+y)}{x+y}; si\ x+y\neq 0$ ahora realizamos el estudio por separado.

a) En el origen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x+y)}{x+y} = 1$$

$$pero,\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1; \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

De modo que no existe el límite.

b) En el resto de los puntos de la recta $x+y=0\ es\ x\neq 0 \therefore \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \dfrac{x}{x+y} = \infty$

En definitiva, la función es discontinua en todos los puntos de la recta $x+y=0$

EJEMPLO 29. Determine si la función dada es continua

$$f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & si\ x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & si\ x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Una forma práctica de demostrar la continuidad es considerando $z = x^2 + y^2$, luego se tiene: $F(z) = f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-z} & si\ z \leq 1 \\ 0 & si\ z < 1 \end{cases}$ ahora calculamos el límite de $F(z)$ cuando $z \to 1$

$$\exists \lim_{z\to 1} F(z) \Leftrightarrow \lim_{z\to 1} F(z) = \lim_{z\to 1} F(z)$$
$$\lim_{z\to 1} F(z) = \lim_{z\to 1} \sqrt{1-z} = \sqrt{1-1} = 0$$
$$\lim_{z\to 1} F(z) = \lim_{z\to 1} 0 = 0$$

Como $\lim\limits_{z\to 1} F(z) = \lim\limits_{z\to 1} F(z) = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{z\to 1} F(z) = 0$ además $\lim\limits_{z\to 1} F(z) = F(1) = 0$ se concluye que $F(z)$ es continua.

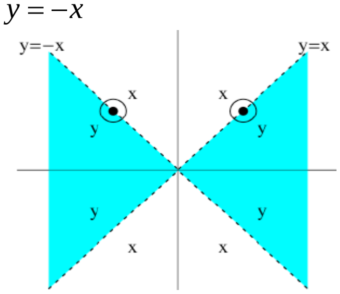
EJEMPLO 30. Analizar la continuidad de la función $f\left(x,y\right)=\begin{cases} x & si\ \ |x|\le|y| \\ y & si\ \ |x|>|y| \end{cases}$

La función es continua en todos los puntos (x,y) tales que $|x|\ne|y|$. Debemos estudiar si lo es en los puntos de la recta $y=x;\ y=-x$

a) $y=x\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=x_0$, a un lado de la recta la función toma valor y, y al otro lado de dicha recta el valor que toma la función es x, y ambos tienden a x_0 por lo que se deduce que la función es continua.

b) $y=-x$, En cualquier entorno del punto $(x_0,-x_0)$ la función toma los valores de $x\ e\ y$, por lo tanto tiene dos posibles límites, x_0 y $-x_0$ por lo que se deduce que la función no es continua (salvo en el origen).

En la figura se puede observar el comportamiento de la función en las proximidades de los puntos de las rectas $y=x;\ y=-x$



EJEMPLO 31. Analizar la continuidad de la función $f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x^2-y^2} & si\ \ x^2+y^2\ne 1 \\ 0 & si\ \ x^2+y^2=1 \end{cases}$

La función es continua en los puntos que no pertenecen a la circunferencia $x^2+y^2=1$ sin embargo, no lo es en los puntos si $a^2+b^2=1$ ya que evaluando el límite obtenemos $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\infty$

DEFINICIÓN: Si una función f de dos variables es discontinua en un punto (x_0,y_0) pero $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\,existe$, entonces se dice que f tiene una **DISCONTINUIDAD REMOVIBLE** (o *eliminable)* en (x_0,y_0) debido a que si se redefine f en (x_0,y_0) de modo que: $f(x_0,y_0)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ Entonces la nueva función es continua en (x_0,y_0) Si una discontinuidad no es removible, entonces se denomina **DISCONTINUIDAD ESENCIAL.**

EJEMPLO 32. Analizar la continuidad de la función $f\left(x,y\right)=\dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$

La función es continua en todo punto $(x,y)\in\Re^2/(x,y)\ne(0,0)$. En el punto $(0,0)$ la función no está definida pues la expresión no tiene sentido $(x,y)=(0,0)$. Sin embargo, la función si tiene límite cuando $(x,y)\to(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}=0$ Se trata de una discontinuidad evitable. Esta circunferencia permite hacer que la función sea continua añadiendo a su definición el valor $f(0,0)=0$ de esta manera también será continua en $(x,y)=(0,0)$. La función redefinida tendrá por expresión:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

EJEMPLO 33. Analizar la continuidad de la función $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

La función es continua en todo punto $(x,y)\in\Re^2/(x,y)\neq(0,0)$. En el punto $(0,0)$ la función no está definida y además no existe su límite $(x,y)\to(0,0)$. En este caso se trata de una discontinuidad esencial y no es posible, de ninguna manera, redefinir la función y encontrar su valor para $f(0,0)$ que solucione esta situación de discontinuidad.

OBSERVACIONES:

1) Una función polinómica de dos variables es continua en cada punto de R^2

2) Una función racional de dos variables es continua en cada punto de su dominio.

3) Suponga que f es una función de una variable y que g es una función de dos variables tal que g es continua en (x_0,y_0) y f es continua en $g(x_0,y_0)$. Entonces la función compuesta $f\circ g$ es continua en (x_0,y_0)

EJEMPLO 34. Determine todos los puntos en los que $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$ es continua.

El dominio de f es el conjunto de todos los puntos $(x,y)\in\Re^2$ para los cuales $x^2+y^2-25>0$. Estos son los puntos de la región exterior limitada por la circunferencia $x^2+y^2=25$

La función f es el cociente de las funciones g y h para las que $g(x,y)=1;\ h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-25}$ Como g es una función constante, es continua en cada punto de $\Re^2$. Por lo tanto, es continua en todos los puntos de $\Re^2$ que satisfacen la desigualdad $x^2+y^2-25>0$ entonces f es continua en todos los puntos de su dominio.

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE TRES VARIABLES.

Sea f una función de tres variables que se define en algún disco abierto $B\left((x_0,y_0,z_0);r\right)$, excepto quizás por un punto (x_0,y_0,z_0) sí mismo. Entonces $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=L$, para cualquier $t>0$, por pequeño que sea, existe una $\delta>0$ de tal manera que si $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$ entonces $\left|f(x,y,z)-L\right|<c$

EJEMPLO 35. Dada $f(x,y,z)=\dfrac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2}$ demostrar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ existe.

Para probar $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2}=0$, se muestra que para cualquier $c>0$ hay un $\delta>0$ de tal manera que $\left|\dfrac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2}\right|<c$ cuando $0<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<b$

$$\left|\frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2}\right|\le\frac{\left|y^2\right|^{\frac{3}{2}}+|x|z^2}{x^2+y^2+z^2}\le\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}<2b$$

Por consiguiente, si $\delta=\frac{1}{2}c$. Se cumple $0<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<b$

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD EN UN PUNTO PARA UNA FUNCIÓN DE TRES VARIABLES:

La función f de tres variables x,y,z se dice que es continua en el punto $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ si y solo si se cumplen las tres condiciones se cumplen:

i. $f\left(x_0,y_0,z_0\right)$ existe;

ii. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}(x,y,z)$ existe;

iii. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}f\left(x,y,z\right)=f\left(x_0,y_0,z_0\right)$

Para resolver límites de tres variables se aplican los mismos teoremas utilizados para las funciones de dos variables.

EJEMPLO 36. Hallar el límite si existe $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2.6)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2.6)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{3}$$

EJEMPLO 37. Analizar la continuidad de la función $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{2x-y+z-2}{x+y-z-1}, & sí\ \ x+y-z\neq 1\\ 0 & sí\ \ x+y-z=1\end{cases}$

Debemos estudiar la continuidad de la función en los puntos del plano $x+y-z=1$ (en el resto de la función obviamente es continua). Se realiza el estudio de los dos casos:

a) $x_0\neq 1\Rightarrow x_0+y_0-z_0=1\Rightarrow \lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}\frac{3(x_0-1)}{0}=\infty$

$x_0=1\Rightarrow y_0=z_0\Rightarrow$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{z\to z_0}\frac{2x-y+z-2}{x+y-z-1}\right)\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\lim\limits_{y\to y_0}\frac{2x-y+y_0-2}{x+y-y_0-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1}=2$

$\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{z\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-y+z-2}{x+y-z-1}\right)\right)=\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{z\to y_0}\frac{-y+z}{y-z}\right)=\lim\limits_{y\to y_0}\frac{-y+y_0}{y-y_0}=-1$

Se observa que hay dos límites iterados diferentes por lo tanto no existe el límite y por ende la función no es continua

EJERCICIOS PROPUESTOS

Establezca el límite determinando una $\delta>0$ para cualquier $\varepsilon>0$ tal que se cumpla la definición

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)}\left(3x-4y\right)=1$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)}\left(5x+4y\right)=-6$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)}\left(3x-2y\right)=-9$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)}\left(5x-3y\right)=-2$

Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **existe.**

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ 6) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 7) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Determine si el límite existe.

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Evalúe el límite mediante los teoremas de límites.

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{3x-2y}{x+4y}$ 10) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt[3]{x^3+2y}$ 11) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2}$

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^{\frac{4}{3}}-(y-1)^{\frac{4}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}+(y-1)^{\frac{2}{3}}}$

Muestre la aplicación de teoremas para calcular el límite.

13) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \tan^{-1}\left[\dfrac{y}{x}\right]$ 14) $\lim\limits_{(x,y)\to(\ln 3,\ln 2)} e^{x-y}$ 15) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} \sqrt{\dfrac{1}{3x-4y}}$

16) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,3)} \left[\!\left[5x+\dfrac{1}{2}y^2\right]\!\right]$

Hallar los límites (si existen):

17) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \log\left|1+x^2y^2\right|$ 18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \dfrac{x}{\sqrt{y}}$ 19) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{2}\right)} (\sec x\, tg\, y)$

20) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left[\dfrac{x^2+y^2}{x+y+1}\right]$ 21) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \left[\dfrac{x\, sen\, y}{x^2+1}\right]$

22) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \left(\dfrac{\cos x-1}{x^2}\right)\left(\dfrac{y-2}{y^2-4}\right)$ 23) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,2)} \left[\dfrac{xy+y-2x-2}{x+1}\right]$

24) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left[\dfrac{x^3y^3-1}{xy-1}\right]$ 25) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\dfrac{sen(x^2+y^2)\log(2-x)}{x^2+y^2}\right]$

26) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)} \left[\dfrac{sen(x^2)}{x}\right] sen\left[\dfrac{1}{y+2}\right]$ 27) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \left[\dfrac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}\right]$

En los siguientes ejercicios demuestre la no existencia del $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

28) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 29) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

30) $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$ 31) $f(x,y)=\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

32) $f(x,y)=\dfrac{x^9y}{\left(x^6+y^2\right)^2}$ 33) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

34) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$

Demostrar si los siguientes límites existen

35) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{sen\,xy}{x}$

36) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,k)} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{x}$

37) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\dfrac{x}{x+y}\right]$

38) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]$

39) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$

Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

40) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

41) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x-y)^2}$

42) $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$

Determine todos los puntos en los que la función en continua.

43) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y-1}$

44) $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$

45) $h(x,y)=sen\left[\dfrac{y}{x}\right]$

46) $f(x,y)=\ln(xy^2)$

47) $f(x,y)=\dfrac{4x^2y+3y^2}{2x-y}$

48) $f(x,y)=\dfrac{5xy^2+2y}{16-x^2-4y^2}$

49) $g(x,y)=Ln\left(25-x^2-y^2\right)$

50) $f(x,y)=\cos^{-1}(x+y)$

51) $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2-4}}$

52) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+9y^2-36}}$

53) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

54) $f(x,y)=\sec^{-1}(xy)$

55) $f(x,y)=Ln\left(x^2+y^2-9\right)-Ln\left(1-x^2-y^2\right)$

56) $f(x,y)=sen^{-1}(x+y)+\ln(xy)$

57) $f(x,y)=sen^{-1}(xy)$

58) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{16-x^2+y^2}}$

Determine si la función f es continua en (0, 0) si está definida por:

59) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

60) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

61) $h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

62) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$63) G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$64) F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{|x^3|+|y^3|} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$65) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x-y} & si\ x\neq y\\ x-y & si\ x=y\end{cases}$$

$$66) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)}{(x-y)} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$67) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$68) f(x,y)\begin{cases}y\text{sen}\left[\dfrac{1}{x^2+y^2}\right] & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$$

$$69) f(x,y)\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$$

$$70) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{sen(x+y)}{x+y} & si\ x+y\neq 0\\ 1 & si\ x+y=0\end{cases}$$

$$71) f(x,y)\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$$

$$72) f(x,y)\begin{cases}\dfrac{x^3}{x+y} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$$

73) Demostrar que la función $z=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & si\ \ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & si\ \ x=y=0\end{cases}$ es continua con relación

La función es discontinua en el origen debido a que $f(0,0)$ no existe. Determine si la discontinuidad es removible o esencial. Si la discontinuidad es removible, redefina $f(0,0)$ de modo que la nueva función sea continua en $(0,0)$.

$$74) f(x,y)=\frac{xy}{x^2+xy+y^2} \qquad 75) f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

76) $f(x,y)=(x+y)\,sen\left[\dfrac{x}{x^2+y^2}\right]$

77) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

78) $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$

79) $f(x,y)=\dfrac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

80) $f(x,y)=\dfrac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2}$

81) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

82) Determine el valor de a para que la función sea continua en el origen

$$f(x,y\begin{cases}\text{arctg}\left[\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right] & (x,y)\neq 0\\ a & (x,y)=0\end{cases}$$

83) La función G está definida por $G(x,y)=\begin{cases}x^2+4y^2 & si\ \ x^2+4y^2\leq 5\\ 3 & si\ \ x^2+4y^2>5\end{cases}$.

Demuestre que G es continua en todos los puntos (x,y) de R^2 excepto en aquellos de la elipse $x^2+4y^2=5$.

84) La función F está definida por $F(x,y)=\begin{cases}x^2-3y^2 & si\ \ x^2-3y^2\leq 1\\ 2 & si\ \ x^2-3y^2>1\end{cases}$. Demuestre que F es continua en todos los puntos (x,y) de R^2 excepto en aquellos de la hipérbola $x^2-3y^2=1$.

85) Suponga que f y g son funciones de dos variables que satisfacen las condiciones siguientes:

i) $f(tx,ty)=t^n f(x,y);g(tx,ty)=t^n g(x,y)$ para algunas n y para todos t;

ii) $g(1,1)\neq 0$ y $g(1,0)\neq 0$;

iii) $g(1,1).\,f(1,0)\neq g(1,0).\,f(1,1)$. Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ no existe.

Considerando diferentes líneas de aproximación, demostrar que las funciones siguientes no tienen límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$:

86) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

87) $g(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

88) $h(x,y)=\dfrac{xy}{|xy|}$

89) Demostrar que la función dada tiene límite cero cuando $(x,y)\to(0,0)$ pero los límites iterados son distintos:

$$f(x,y)=\begin{cases}xsen(\frac{1}{y}) & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

90) Hallar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \quad f(x,y)=\begin{cases} 0 & si \quad y\le 0 \ \text{ó} \ y\ge x^2 \\ 1 & si \quad 0<y<x^2 \end{cases}$

Use las definiciones y teoremas para probar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ **no existe.**

91) $f(x,y,z)=\dfrac{x^3+yx^2}{x^4+y^2+z^4}$

92) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

93) $f(x,y,z)=\dfrac{x^4+yx^3+z^2x^2}{x^4+y^4+z^4}$

94) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$

Demostrar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ **existe.**

95) $f(x,y,z)=\dfrac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Utilice la definición y los teoremas de los ejercicios anteriores, para determinar todos los puntos en los que la función es continua.

96) $f(x,y,z)=\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$

97) $f(x,y,z)=Ln\left(36-4x^2-y^2-9z^2\right)$

98) $f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & si \quad (x,y,z)\ne(0,0,0) \\ 0 & si \quad (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

99) $f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & si \quad (x,y,z)\ne(0,0,0) \\ 0 & si \quad (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$