## DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS.
## 1) CASO DE UNA SOLA VARIABLE INDEPENDIENTE. (REGLA DE LA CADENA)

Si $z=f(x,y)$ es una función diferenciable en $x$ e $y$, y a la vez funciones diferenciables de una variable independiente t: $x=g(t)$ $y$ $y=h(t)$, la diferenciación de la función compuesta $z=f(g(t),h(t))$ se puede calcular por la fórmula: $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$$z \begin{array}{l} \nearrow \; x \rightarrow t \\ \searrow \; y \rightarrow t \end{array}$$

**EJEMPLO 1.** Calcular $\frac{dz}{dt}$ si $z=x^2y^3;\ x=2t;\ y=t^2$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(2xy^3)2+(3x^2y^2)2t=[2(2t)(t^2)^3]2+[3(2t)^2(t^2)^2]2t=20t^7$$

**EJEMPLO 2.** Hallar $\frac{du}{dt}$, si $u(x,y)=\ln sen\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, donde $x(t)=3t^2, y(t)=\sqrt{t^2+1}$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{du}{dt}=ctg\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)(6t)-\frac{1}{2}ctg\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{x}{y\sqrt{y}}\right)\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\sqrt{y}}ctg\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\left(6t-\frac{xt}{2y\sqrt{t^2+1}}\right)\Rightarrow\frac{du}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}ctg\left(\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}\right)\left(6t-\frac{3t^3}{2(t^2+1)}\right)$$

**EJEMPLO 3.** Hallar $\frac{dz}{dx}$ si $z=u^v$, donde $u=sen\,x, v=\cos x$.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=vu^{v-1}\cos x+u^v\ln u\left(-sen\,x\right)=\cos^2\left(sen\,x\right)^{\cos x-1}-$$

$$-\left(sen\,x\right)^{\cos x}sen\,x\ln\left(sen\,x\right)$$

$$\frac{dz}{dx}=\left(sen\,x\right)^{\cos x}\left[\cos x\,ctg\,x-sen\,x\ln sen\,x\right]$$

**En caso de tres variables:** $\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

**EJEMPLO 4.** Calcular $\frac{dw}{dt}$ si $w=x^2y+y+xz;\ x=\cos t;\ y=sent,\ z=t^2$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt}=-2sen^2(t)\cos(t)-t^2sen(t)+\cos^3(t)+\cos(t)+2t\cos(t)$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

**EJEMPLO 5.** Hallar $\frac{du}{dt}$, si $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, donde $x=R\cos t, y=R\,sen\,t, z=H$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{du}{dt}=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-R\,sen\,t\right)-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(R\cos t\right)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(0\right)$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{HR^2\cos t\,sen\,t}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{HR^2 sen\,t\cos t}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+0=0\therefore\frac{du}{dt}=0$$

**2) CASO DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES. (REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES COMPUESTAS)**

Si z es una función compuesta de varias variables independientes tal como $z=f(x,y)$, donde $x=g(u,v)$ $y$ $y=h(u,v)$, son funciones cuyas primeras derivadas parciales existen en $(u,v)$, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial u}y\frac{\partial z}{\partial v}$ de $z=f(x,y)$ con respecto a u y v se expresa así: $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$; $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

$$\begin{array}{ccccc} & & & \nearrow & u \\ & \nearrow & x & \searrow & v \\ z & & & \nearrow & u \\ & \searrow & y & \searrow & v \end{array}$$

**En caso de tres variables:**

Si $w(x,y,z)$ y $x(u,v,r);\ y(u,v,r);\ z(u,v,r)$ las derivadas parciales $\frac{\partial w}{\partial u};\frac{\partial w}{\partial v};\frac{\partial w}{\partial r}$ son:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

**EJEMPLO 6.** Sean $\omega\left(p,q,r\right)=pqsen(r),\ \ p(st)=2s+t,\ \ q(st)=s-t,\ \ r(st)=st$ Determine $\frac{\partial\omega}{\partial s}y\frac{\partial\omega}{\partial t}$

$$\frac{\partial\omega}{\partial s}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)\Rightarrow\frac{\partial\omega}{\partial s}=2q\,senr+psenr+pqt\cos r$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial s}=\left(s-t\right)t\left(2s+t\right)+\cos(st)+2\left(s-t\right)sen(st)+\left(2s+t\right)sent$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial s}=\left(2s^2t+-st^2-t^3\right)\cos(st)+\left(4s-t\right)sen(st)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)=qsen(r)-psen(r)+pqs\cos(r)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=s\left(s-t\right)t\left(2s+t\right)+\cos(st)+\left(s-t\right)sen(st)+\left(2s+t\right)sen(st)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\left(2s^3+-st^2-st^2\right)\cos(st)-\left(s+2t\right)sen(st).$$

Una forma alternativa:

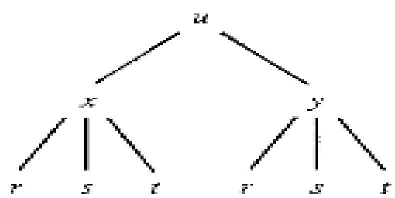
$$\omega(s,t)=(s-t)(2s-t)sen(st)\Rightarrow\frac{\partial\omega}{\partial s}=(s-t)t(2s+t)\cos t+2(s-t)sen(st)+(2s+t)sen(st)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial s}=\left(2s^2-st^2-t^3\right)\cos st+(4s+t)sen(st)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=s(s-t)(2s+t)\cos st+(s-t)sen(st)-(2s+t)sen(st)\Rightarrow\frac{\partial\omega}{\partial t}=\left(2s^3-s^2t-st^2\right)\cos st-(s+2t)sen(st)$$

**EJEMPLO 7.** Mediante un diagrama de árbol, escriba la regla de la cadena para el caso dado. Suponga que todas las funciones son diferenciables.

$u=f(x,y)$, donde $x=x(r,s,t)$, $y=y(r,s,t)$




$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

**EJEMPLO 8.** $R(u,v,w)=\ln\left(u^2+v^2+w^2\right)$; $u(x,y)=x+2y,\ v(x,y)=2x-y,\ w(x,y)=2xy$;

calcular $\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}$ cuando $x=y=1$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(1)+\frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(2)+\frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(2y)=$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{2u+4v+4wy}{u^2+v^2+w^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(2)+\frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(-1)+\frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(2x)=$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{4u-2v+4wx}{u^2+v^2+w^2}$$

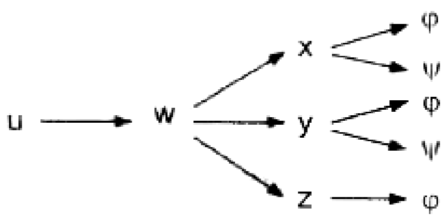
Cuando $x-y=1$ tenemos $u=3, v=1$ y $w=2$, así $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{9}{7}$ y $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{9}{7}$.

**EJEMPLO 9.** Si $p=f\left(v,\omega\right), v=v\left(x,y,z,t\right)$ and $\omega=\left(x,y,z,t\right)$, Determine $\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z},\frac{\partial p}{\partial t}$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x};\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial z};\qquad \frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}$$

**EJEMPLO 10.** Demostrar que si $w(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)$ donde $x(\varphi,\psi)=R\cos\varphi\cos\psi$, $y(\varphi,\psi)=R\cos\varphi\, sen\psi$, $z(\varphi)=R\, sen\varphi$ entonces $\frac{\partial w}{\partial \varphi}=0$ y $\frac{\partial w}{\partial \psi}=0$.




$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}=2x\left(-R\, sen\varphi\cos\psi\right)+2y\left(-R\, sen\varphi sen\psi\right)+2z(R\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}=2R\left(-x\, sen\varphi\cos\psi-y\, sen\varphi sen\psi+z\cos\varphi\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}=2R\left[-R\, sen\varphi\cos\varphi\cos^2\psi-R\, sen\varphi\cos\varphi sen^2\psi+R\, sen\varphi\cos\varphi\right]\Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}=2R^2\left[-sen\varphi\cos\varphi\left(\cos^2\psi+sen^2\psi\right)+sen\varphi\cos\varphi\right]\Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}=2R^2\left[-sen\varphi\cos\varphi+sen\varphi\cos\varphi\right]=2R^2\left(0\right)=0\therefore\frac{\partial w}{\partial \varphi}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \psi}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \psi}=2x\left(-R\cos\varphi\, sen\psi\right)+2y(R\cos\varphi\cos\psi)\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial \psi}=2R\left(-x\cos\varphi\, sen\psi+y\cos\varphi\cos\psi\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \psi}=2R\left[-R\cos^2\varphi\cos\psi sen\psi+R\cos^2\varphi sen\psi\cos\psi\right]=2R\left(0\right)=0\therefore\frac{\partial u}{\partial \psi}=0$$

**EJEMPLO 11.** Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ si $z(x,y)=arctg\left(\frac{x}{y}\right)$, donde $x(u,v)=u\, sen v$ $y(u,v)=u\cos v$.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)sen\,v-\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos v\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{u\,sen\,v\cos v}{x^2+y^2}-\frac{u\,sen\,v\cos v}{x^2+y^2}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)u\cos v+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)u\,sen\,v=\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1\therefore\frac{\partial z}{\partial v}=1$$

**EJEMPLO 12.** Demostrar que la función $w=f(u,v)$ donde $u=x+at, v=y+bt$, satisfacen a la ecuación $\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}$.

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a;\frac{\partial v}{\partial t}=b\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial w}{\partial u}+b\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow como\!:\ \frac{\partial u}{\partial x}=1\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow como\!:\frac{\partial v}{\partial y}=1\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}\therefore\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}$$

## DERIVACIÓN IMPLICITA (REGLA DE LA CADENA)

Si la ecuación $F(x,y)=0$ define implícitamente a "***y***" como función derivable de "***x***", entonces usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad\frac{\partial F}{\partial y}\neq0$$

Si la ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente a "***z***" como función diferenciable de "***x***" ***e "y",*** entonces:

a) Al derivar ambos lados respecto a "x", manteniendo "y" fijo obtenemos:
$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$ Si despejamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ y observamos que $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ obtenemos la primera fórmula. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\qquad\frac{\partial F}{\partial z}\neq0$

b) En forma similar, al derivar ambos lados respecto a "y", manteniendo "x" fijo, despejamos $\frac{\partial z}{\partial y}$ obtenemos la segunda fórmula. $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\qquad\frac{\partial F}{\partial z}\neq0$

## NOTAS

**I.** Si $f\left(x,y\right)$ es continua en una región del plano que contiene a un punto $\left(x_0,y_0\right)$ para el cual $f\left(x_0,y_0\right)=0$, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}\, y \frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en dicha región y $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0 en\left(x_0,y_0\right)$ , existe un intervalo en torno de $\left(x_0,y_0\right)$ en el que se puede despejar "y" de la ecuación $f\left(x_0,y_0\right)=0$, siendo "y" una función continua y derivable con respecto a x: $y=\Phi\left(x\right) con y_0=\Phi\left(x\right)$ $y$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

**II.** Si $f\left(x,y,z\right)$ son continuas en una región del plano que contiene al punto $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ para el cual $F\left(x_0,y_0,z_0\right)=0$, las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}$, son continuas en dicha región y $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0\ en\left(x_0,y_0,z_0\right)$ en , existe un intervalo en torno de $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ en el que se puede despejar "z" de la ecuación $f\left(x,y,z\right)=0$, siendo "z" una función continua y derivable con respecto a x e y: $z=\Phi\left(x,y\right) con z_0=\Phi\left(x_0,y_0\right) y$ $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

**EJEMPLO 13.** Hallar $\frac{dy}{dx}\ siendo\ f\left(x,y\right)=y^3+xy-12=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y;\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2+x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{y}{3y^2+x}$$

**EJEMPLO 14.** Hallar $\frac{dy}{dx}; siendo\ e^x seny+e^y senx=1$ ,

$$f\left(x,y\right)=e^x seny+e^y senx-1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x seny+e^y\cos x;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=e^x\cos y+e^y senx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{e^x seny+e^y\cos x}{e^x\cos y+e^y senx}$$

**EJEMPLO 15.** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x} y\frac{\partial z}{\partial y},\ siendo\ F\left(x,y,z\right)=x^2+3xy-2y^2+3xz+z^2=0$

Tomando z como una función de x e y definida por la relación y derivando parcialmente con respecto a x y de nuevo con respecto a y, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(2x+3y+3z\right)+\left(3x+2z\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\left(3x-4y\right)+\left(3x+2z\right)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2x+3y+3z}{3x+2z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{3x-4y}{3x+2z}$$

## DERIVADAS PARCIALES DE ORDENES SUPERIORES

Se llaman derivadas parciales de segundo orden de una función $z=f(x,y)$ a las derivadas parciales de sus derivadas parciales de primer orden.

Para designar las derivadas de segundo orden se emplean las siguientes notaciones.

## CALCULO DE DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

En una función de dos variables, se toma cada una de las derivadas parciales

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x};\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ y se deriva con respecto a la variable "x" y la variable "y".

a) La derivada de orden dos **CON RESPECTO A "X" DOS VECES** es $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$ y se denota como $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$.

b) La derivada de orden dos **CON RESPECTO A "X" CON RESPECTO A "Y"** es $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$ y se denota como $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=f_{xy}(x,y)$.

c) La derivada de orden dos **CON RESPECTO A "Y" CON RESPECTO A "X"** $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$ es y se denota como $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=f_{yx}(x,y)$

d) La derivada de orden 2 **CON RESPECTO A "Y" DOS VECES** es $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$ y se denota como $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$

**NOTA**: Según la notación que se use, siempre se deriva primero la variable que está más cercana de la función f.

## IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES CRUZADAS

Si $f$ es una función continua entonces para todo $(x,y)$ perteneciente al dominio se verifica que las derivadas cruzadas son iguales.

En dos variables sería: Si $f:D\to R^2\ con\,D\subseteq R^2$ y $f(x,y)$ **ES CONTINUA**, entonces:

$$\forall(x,y)\,se\ \ verifica\ \ que\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$$

(Si las derivadas parciales que hay que calcular son continuas, el resultado de la derivación no depende del orden de dicha derivación).

**EJEMPLO 16.** Sea $f(x,y)=3xy^2-2y+5x^2y$ Calcular las derivadas de orden 2 y evaluarlas en el punto (-1,2).

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3y^2+10xy^2;\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=6xy-2+10x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=10y^2;\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=6y+20xy;\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=6y+20xy;\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=6x+10x^2$$

Se evalúan las derivadas de orden 2 en (-1, 2)

$$\frac{\partial^2 f(-1,2)}{\partial x^2}=40;\quad \frac{\partial^2 f(-1,2)}{\partial y\partial x}=-28;\quad \frac{\partial^2 f(-1,2)}{\partial y^2}=4$$

**EJEMPLO 17.** Sea $f(x,y,z)=ye^x+\ln z$ . Probar que:

$$a)\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial y};\quad b)\ \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial z^2\partial x}=\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial z\partial x\partial z}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=ye^x+\ln z;\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=e^x;\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=\frac{x}{z}$$

$$a)\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)=\frac{1}{z};\quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)=\frac{1}{z}$$

$$b)\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial z^2\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial x}\right)=-\frac{1}{z^2};\quad \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial z\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial z}\right)=-\frac{1}{z^2}$$

**EJEMPLO 18.** Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{cbx}{a\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{abcy^2}{\left(b^2x^2+a^2y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{bcx}{a\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-abcxy}{\left(b^2x^2+a^2y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{acy}{b\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{abcx^2}{\left(b^2x^2+a^2y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

**EJEMPLO 19.** Hallar $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, si $u(x,y,z)=x^\alpha y^\beta z^\gamma$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ax^{\alpha-1}y^\beta z^\gamma\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^\gamma\Rightarrow\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\alpha\beta\gamma x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}$$

**EJEMPLO 20.** Demuestre si la función dada es continua $f\left(x,y\right)=arctg(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{1+\left(xy\right)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\left(1+x^2y^2\right)-y\left(2yx^2\right)}{\left(1+x^2y^2\right)^2} \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{1+\left(xy\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{1+x^2y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\left(1+x^2y^2\right)-x\left(2xy^2\right)}{\left(1+x^2y^2\right)^2} \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x\partial y} es\ continua$$

Una función de dos variables que satisface la ecuación de Laplace, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ se dice que es **ARMÓNICA.**

**EJEMPLO 21.** Demuestre si la función dada es armónica

$$f\left(x,y\right)=\cos x\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)+senx\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-senx\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)+\cos\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)=-\frac{senx\left(e^y-e^{-y}\right)}{2}+\frac{\cos x\left(e^y+e^{-y}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{\cos x\left(e^y-e^{-y}\right)}{2}-\frac{senx\left(e^y+e^{-y}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\cos x\left(\frac{(e^y+e^{-y})2}{4}\right)+senx\left(\frac{(e^y-e^{-y})2}{4}\right)=-\frac{\cos x\left(e^y+e^{-y}\right)}{2}+\frac{senx\left(e^y-e^{-y}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\cos x\left(\frac{(e^y-e^{-y})2}{4}\right)+senx\left(\frac{(e^y+e^{-y})2}{4}\right)=\frac{\cos x\left(e^y-e^{-y}\right)}{2}+\frac{senx\left(e^y+e^{-y}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{\cos x\left(e^y-e^{-y}\right)}{2}-\frac{senx\left(e^y+e^{-y}\right)}{2}+\frac{\cos x\left(e^y-e^{-y}\right)}{2}+\frac{senx\left(e^y+e^{-y}\right)}{2}=0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

## DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES.

Recibe el nombre de diferenciables de segundo orden de una función $z=f(x,y)$ la diferencial de la diferencial de primer orden de dicha función: $d^2z=d(dz)$ y en general $d^nz=d(d^{n-1}z)$

Si $z=f(x,y)$, donde “x” e “y” son variables independientes y la función f tiene derivadas parciales continuas de segundo grado, la diferencial de 2do orden de la función $z=f(x,y)$ se calcula por la fórmula: $d^2z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)dx^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dy^2$ En general, cuando existen las correspondientes derivadas se verifica la fórmula simbólica $d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$

Que formalmente se desarrolla según la ley binomial.
Si $z=f(x,y)$, donde los argumentos "x" e "y" son a su vez funciones de una o varias variables independientes, tendremos:

$$d^2z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)dx^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dy^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)d^2x+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)d^2y$$

**EJEMPLO 22.** Hallar $d^2u$ sí $u(xyz)=xyz$.

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d^2x+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}d^2y+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}d^2z+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dy\,dz+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial dz}dx\,dz+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=xz & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial dz}=y\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=xy & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=z\end{cases}$$

$$d^2u=0+0+0+2\left(x\,dy\,dz+y\,dy\,dz+z\,dx\,dy\right)\therefore d^2u=2\left(x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy\right)$$

**EJEMPLO 23.**Hallar $d^2f\left(0,0,0\right)$, si $f\left(x,y,z\right)=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial x}=2x-2y+4z\\ \dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y}=4y-2x+2z\\ \dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z}=6z+4x+2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial x^2}=2\\ \dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y^2}=4\\ \dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z^2}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial x\partial y}=0\\ \dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial x\partial z}=4\\ \dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y\partial z}=2\end{cases}$$

$$d^2f\left(x,y,z\right)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f$$

$$d^2f\left(x,y,z\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz\right)$$

$$d^2f\left(0,0,0\right)=2dx^2+4dy^2+6dz^2+2\left(0+4dxdz+2dydz\right)\Rightarrow d^2f\left(0,0,0\right)=2dx^2+4dy^2+6dz^2+8dxdz+4dydz$$

**CASO DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES.** Si $z=f(x,y)$ es una función compuesta, donde $x=g(u,v)$ $y$ $y=h(u,v)$, son funciones cuyas primeras derivadas parciales existen en $(u,v)$, entonces las segundas derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,y\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ de $z=f(x,y)$ se expresa así:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

Ahora se aplica el teorema de del producto para las derivadas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)$$

De forma similar:

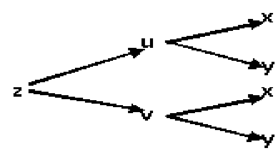
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

Ahora se aplica el teorema de del producto para las derivadas

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right)$$

**EJEMPLO 24.** Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $z=f(u,v)$ donde $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$.

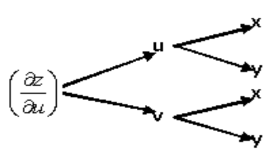


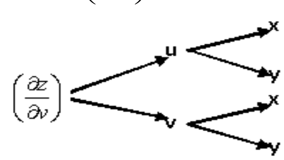

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$




$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Realizando las respectivas sustituciones

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

En forma similar se obtiene.

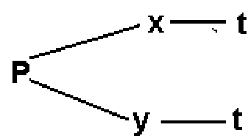
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

## APLICACIONES.

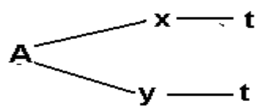
**EJEMPLO 25.** Un lado de un rectángulo de $x=20\,m$, aumenta con una rapidez de $5\,\frac{m}{s}$, el otro lado de $y=30\,m$, disminuye con una rapidez de $4\,\frac{m}{s}$ ¿Con que rapidez variarían el perímetro y el área de dicho rectángulo?

El perímetro del rectángulo es: $P(x,y)=2x+2y$ además se tiene: $\frac{dy}{dt}=-4\,\frac{m}{s},\frac{dx}{dt}=5\,\frac{m}{s}$




La rapidez con que varía el perímetro es: $\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2(5)+2(-4)=2\,\frac{m}{s}$

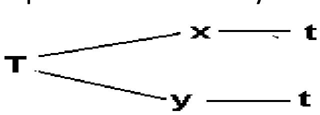
Por otra parte el área $A(xy)=xy$; la rapidez de variación del área es




$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt}=y(5)-4(x)$, para $x=20, y=30$ se tiene:

$\frac{\partial A}{\partial t}=30(5)-4(20)=150-80=70 \therefore \frac{\partial A}{\partial t}=70\,\frac{m^2}{s}$

**EJEMPLO 26.** La temperatura en un punto $(x,y)$ es $T(x,y)$, medida en grados Celsius. Una partícula se mueve de tal modo que su posición después de $t$ segundos está definida por $x=\sqrt{1+t}, y=2+\frac{1}{3}t$, donde $x$ y $y$ se miden en centímetros. La función de la temperatura cumple con $T_x(2,3)=4$ y $T_y(2,3)=3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura en la trayectoria de la partícula después de 3 segundos?




Por la regla de la cadena $\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

Después de 3 segundos: $x=\sqrt{1+t}=\sqrt{1+3}\Rightarrow x=2,\; y=2+\frac{t}{3}=2+\frac{(3)}{3}\Rightarrow y=3$

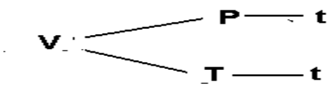
$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}=\frac{1}{2\sqrt{1+3}}=\frac{1}{4};\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=T_x\left(2,3\right)\frac{dx}{dt}-T_y\left(2,3\right)\frac{dy}{dt}=4\left(\frac{1}{4}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)=2\ ,$$

. Por lo tanto la temperatura está aumentando a un ritmo de 2 C/s.

**EJEMPLO 26.** La presión de un mol de gas ideal se incrementa a razón de $0.05\frac{KPa}{s}$ y la temperatura aumenta a razón de $0.15\frac{K}{s}$ Determinar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de $20KPa$ y la temperatura es de 320 K.

$$PV=RT\Rightarrow V(P,T)=\frac{RT}{P};\ P(t);\ T(t)$$




$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial P}\left(\frac{dP}{dt}\right)+\frac{\partial V}{\partial T}\left(\frac{dT}{dt}\right)\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{-RT}{P^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)-\frac{R}{P}\left(\frac{dT}{dt}\right)$$

$$\frac{dP}{dt}=0.05,\frac{dT}{dt}=0.15,\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{-RT}{P^2}\left(0.05\right)-\frac{R}{P}\left(0.15\right);pero:P=20,T=320;R=8.31\cdot$$

$$\frac{dV}{dt}=8.31\left(\frac{\left(0.15\right)}{20}-\frac{(320)\left(0.05\right)}{(20)^2}\right)\approx-0.27L/s\therefore\frac{dV}{dt}\approx-0.27L/s$$

**EJEMPLO 27.** Demuestre que la funciones dadas $u(t,x)=e^{-ct}sen\,x$ y $u(t,x)=t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{(4ct)}}$ satisfacen la ecuación del calor. $c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$

$$u=e^{-ct}sen\left(ct\right)\Rightarrow u_x=e^{-ct}\cos\left(x\right)\Rightarrow u_{xx}=-e^{-ct}sen\left(x\right)\Rightarrow u_t=-ce^{ct}sen\left(x\right)\therefore cu_{xx}=u_t$$

$$u=t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4ct}}\Rightarrow u_x=t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4ct}}\left(-\frac{x}{2ct}\right)\Rightarrow u_{xx}=\frac{\left(x^2-2ct\right)}{\left(4c^2t^{\frac{5}{2}}e^{\frac{x^2}{4ct}}\right)}\Rightarrow u_t=\frac{\left(x^2-2ct\right)}{\left(4ct^{\frac{5}{2}}e^{\frac{x^2}{4ct}}\right)}\therefore cu_{xx}=u_t$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar $\frac{dz}{dt}$ **o** $\frac{dw}{dt}$

1) $z(x,y)=x^2+y^2+xy,\ x(t)=sen\,t,\ y(t)=e^t$

2) $z(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2},\ x(t)=\ln t,\ y(t)=\cos t$

3) $w(x,y,z)=xe^{\frac{y}{z}},\ x(t)=t^2,\ y(t)=1-t,\ z(t)=1+2t$

Calcule $\frac{d\omega}{dt}$ Exprese su respuesta final en términos de t.

4) $w(x,y)=e^{\left(x^2-y^2\right)};x(t)=t;y(t)=\sqrt{t}$

5) $\omega(x,t)=x^2y^3,\ x(t)=t^3,\ y(t)=t^2$

6) $\omega(x,y)=x^2y-y^2x;\quad x(t)=\cos t,\ y(t)=sen\,t$

7) $\omega(x,y)=e^x sen\,y+e^y sen\,x; x(t)=3t,\ y(t)=2t$

8) $\omega(x,y)=\ln\left(\dfrac{x}{y}\right);\ x(t)=\tan t,\ y(t)=\sec^2 t$

9) Hallar $\dfrac{dz}{dt}$ si $z=\dfrac{x}{y}$, donde $x=e^t, y=\ln t$

10) $\omega(x,y,z)=sen\left(xyz^2\right);\ x(t)=t^3, y(t)=t^2, z(t)=t$

11) $\omega(x,y,z)=xy+yz+xz;\ x(t)=t^2, y(t)=1-t^2, z(t)=1-t$

12) Hallar $\dfrac{du}{dt}$, si $u=xyz$, donde $x=t^2+1, y=\ln t, z=tg\,t$ .

13) Hallar $\dfrac{du}{dt}$, si $u=xyz$, donde $x=t^2+1, y=\ln t, z=tg\,t$ .

14) Sean $\omega(x,y,z)=sen(xyz)$ , $x=t,\ y=t^2, z=t^3$ Determine: $\dfrac{d\omega}{dt}$

15) Sean $\omega(u,v,z)=ln(u+v+z),\ u(t)=\cos^2 t, v(t)=sen^2 t,\ z(t)=t^2$ Determine: $\dfrac{d\omega}{dt}$

16) Si $\omega(u,v)=u^2-u\tan v,\ u(x)=x, v(x)=\pi x$, determine $\left.\dfrac{d\omega}{dx}\right|_{x=\frac{1}{4}}$

Mediante un diagrama de árbol, escriba la regla de la cadena para el caso dado. Suponga que todas las funciones son diferenciables.

17) $w=f(r,s,t);\ r=r(x,y); s=s(x,y); t=t(x,y)$

18) Hallar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ si $u=f(x,y,z)$ donde $y=\varphi(x), z=\psi(x,y)$.

**Determine:** $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ **y** $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

19) $z(x,y)=x^2y^3, x(s,t)=s\cos t, y(s,t)=s\,sen\,t$

20) $z(\theta,\phi)=sen\,\theta\cos\phi,\ \theta(s,t)=st^3, \phi(s,t)=s^2t$

21) $z(\theta,r)=e^r\cos\theta,\ \ r(st)=st,\ \ \theta(st)=\sqrt{s^2+t^2}$

22) Determine $\dfrac{\partial p}{\partial u},\dfrac{\partial p}{\partial v},\dfrac{\partial p}{\partial w}$ $si\ \ p=f(x,y);\ x=x(u,v,\omega);\ y=y(u,v,\omega)$

23) Determine $\dfrac{\partial p}{\partial u},\dfrac{\partial p}{\partial v}$ $si\ p=f(x,y,z);\ x=x(u,v,);\ y=y(u,v); z=(u,v)$

24) Determine $\dfrac{\partial p}{\partial x},\dfrac{\partial p}{\partial y},\dfrac{\partial p}{\partial z}$ $si\ \ p=f(u,v,\omega); u=u(x,y,z);\ v=v(x,y,z);\omega=(x,y,z)$

25) Determine $\dfrac{\partial p}{\partial x},\dfrac{\partial p}{\partial y},\dfrac{\partial p}{\partial z},\dfrac{\partial p}{\partial t}$ Si $p=f(\omega);\ \omega=\omega(x,y,z,u,v)$

26) Determine $\dfrac{\partial p}{\partial s},\dfrac{\partial p}{\partial t}$ Si $p=f(x,y,u,v), x=x(s,t), y=y(s,t),\ \ u=u(s,t), v=v(s,t)$

Determine $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ Exprese su respuesta final en términos de $s$ y $t$.

27) $\omega(x,y)=x^2y;\ x(st)=st;\ y(st)=s-t$

28) $\omega(x,y)=x^2-y\ln x;\ x(st)=\frac{s}{t},\ y(st)=s^2t$

29) $\omega(x,y)=e^{x^2+y^2};\ x(s,t)=s\,sen(t);\ \ y(s,t)=t\,sen(s)$

30) $\omega(x,y)=\ln(x+y)-\ln(x-y);\ x(s,t)=te^s;\ y(s,t)=e^{st}$

31) $\omega(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\ x(s,t)=\cos(st),\ y(s,t)=sen(st),\ z(s,t)=s^2t$

32) $\omega(x,y,z)=e^{xy+z};\ x(s,t)=s+t,\ y(s,t)=s-t,\ z(s,t)=t^2$

33) Determine $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$ Si $\omega(u,v,x,y)=u^2+v^2+x^2+y^2,\ \ u(x,y)=x-y;\ \ v(x,y)=x+y$

34) Calcular $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$, Si $\omega(u,v,x,y)=\sqrt{uvxy},\ \ u(x,y)=\sqrt{x-y},\ \ v(x,y)=\sqrt{x+y}$

35) Calcular $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$ Si $\omega=(u,v,x,y)=xy\ \ln(u+v),\ u=\sqrt[3]{(x^2+y^2)};\ v(x,y)=\sqrt{(x^3+y^3)}$

36) Calcular $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$ Si $\omega(u,v,x,y)=uv-xy;\ u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

37) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=f(u,v)$, donde $u(x,v)=x^2-y^2;v(x,y)=e^{xy}$.

38) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z=f(u)$ donde $u(x,y)=xy+\frac{y}{x}$.

39) Sean $\omega(x,y,z)=1n(x^2+y^2+z^2);x(s,t)=s-t;\ \ y(s,t)=s+t;\ z(s,t)=2\sqrt{(st)}$

Determine: $\frac{d\omega}{ds},\frac{d\omega}{dt}$

40) Determine: $\frac{d\omega}{ds},\frac{d\omega}{dt}$ Si $\omega(x,y,z)=yz+zx+zy,\ \ x(s,t)=s^2-t^2,\ \ y(s,t)=s^2+t^2;z(s,t)=s^2t^2$

41) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z(x,y)=arctg\left(\frac{y}{x}\right);\ y(x)=x^2$.

42) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$ si $z=x^y$ donde $y=\varphi(x)$.

43) Hallar $\frac{\partial u}{\partial p},\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial\theta}$ $si, u(x,y,z)=x^2+yz,\ x(p,r,\theta)=pr\cos\theta,\ y(p,r,\theta)=pr\,sen\theta, z(p,r)=p+r$

cuando $p=2, r=3, \theta=0$

44) Sean $\omega(u,v,z)=\sqrt{u^2+v^2+z^2},\ \ u(t,s)=3e^t sen(s),\ v(t,s)=3e^t\cos s;\ z=4e^t$, Determine:

$\frac{d\omega}{ds},\frac{d\omega}{dt}$

45) Si $z=x^2y, x=2t+s$ y $y=1-st^2$, determine $\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{s=1,t=-2}$

46) Si $z = xy + x + y, x = r + s + t$ y $y = rst$, determine $\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{r=1,s=-1,t=2}$

47) Si $\omega = x^2 y + z^2, x = \rho\cos\theta sen\phi, y = \rho sen\theta\, sen\phi$ y $z = \rho\cos\phi$, determine $\left.\frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right|_{\rho=2,\theta=\pi,\phi=\frac{\pi}{2}}$

48) Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ $si, z(x,y) = x^2 + xy^3, x(u,v,w) = uv^2 + w^3, y(u,v,w) = u + ve^w$ cuando $u = 2, v = 1, w = 0$

49) $\omega(u,v,x,y) = u^2 + v^2 + x^2 + y^2, u(x,y) = x - y$, $v = x + y$, calcule $\frac{\partial \omega}{\partial x}; \frac{\partial \omega}{\partial y}$

50) Si $z = f(x,y)$, Determine $\frac{dz}{dt}$ cuando $t = 3$.donde $f$ es diferenciable y además $x = g(t),\ y = h(t),\ g(3) = 2,\ h(3) = 7,\ g'(3) = 5,\ h'(3) = -4,\ f_x(2,7) = 6,\ f_y(2,7) = -8$

51) Suponga que $f$ es una función diferenciable de $x$ y $y$, y que $g(u,v) = f(e^u + sen\,v, e^v + \cos v)$. Mediante la tabla de valores calcule $g_u(0,0)$ y $g_v(0,0)$.

| | f | g | $F_x$ | $F_y$ |
|---|---|---|---|---|
| (0, 0) | 3 | 6 | 4 | 8 |
| (1, 2) | 6 | 3 | 2 | 5 |

52) Si $w = \log(x^2 + y^2 + 2z), x = r + s, y = r - s, z = 2rs$, hallar $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$.

53) Sean $z = f(t), t = \frac{(x+y)}{xy}$. Probar que $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

Determine $\frac{dy}{dx}$ (la derivada implícita) en los siguientes ejercicios.

54) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$

55) $\cos(x - y) = xe^y$

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ **y** $\frac{\partial z}{\partial y}$

56) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

57) $x - z = \arctan(yz)$

58) $F(x,y,z) = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - 1.$

59) $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz.$

60) $F(x,y,z) = xe^{xy} + ye^{zx} + ze^{xy} - 3$

61) $F(x,y,z) = x^5 + xy^2 + yz - 5$

62) $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$

63) $F(x,y,z) = xyz - sen(x + y + z)$

64) Si $F(x,y,z) = x^3 e^{y+z} - y\,sen(x - z) = 0$ define a $z$ implícitamente como función de $x$ e $y$, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$

65) Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ sí $z(x,y) = \sqrt{2xy + y^2}$.

66) Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ sí $z(x,y) = arctg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

67) Hallar $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, sí $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .

68) Dada: $f(x,y,z)=e^{-xyz}-\ln\left(xy-z^2\right)$ Determine: $\dfrac{\partial f}{\partial x\partial x}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y\partial x}$; $\dfrac{\partial f}{\partial z\partial x}$

69) Si $F(x,y)=3x^4y^5-2x^2y^3$, determine $\dfrac{\partial^3 F(x,y)}{\partial y^3}$.

70) Si $f(x,y)=\cos\left(2x^2-y^2\right)$, determine $\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\partial x^2}$

71) Determine $\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}$ en la función dada $f_{(x,y)}=3x^4y^5-2x^2y^3$

72) Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ sí $z=\ln\left(x^2+y\right)$

73) Hallar todas las derivadas parciales de segundo orden de la función $u(x,y,z)=xy+yz+zx$

74) Hallar $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, sí $z(x,y)=sen\,xy$

En los siguientes ejercicios demuestre si la función dada es continua. Es decir cumple con la siguiente igualdad $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x\partial y}$

75) $f(x,y)=2x^2y^3-x^3y^5$

76) $f(x,y)=\left(x^3+y^2\right)^5$

77) $f(x,y)=3e^{2x}\cos y$

78) $f(x,y)=\arctan(xy)$

79) $f(x,y)=\left(x^3+y^2\right)^5$

80) $f(x,y)=2x^2y^3-x^3y^5$

81) $f(x,y)=x\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

82) $z(x,y)=arcsen\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$

83) $z(x,y)=x^y$

Muestre que las funciones definidas en los problemas siguientes son funciones armónicas (ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$)

84) $f(x,y)=x^3y-xy^3$

85) $f(x,y)=\ln\left(4x^2+4y^2\right)$

86) $f(x,y)=\ln(4x^2+4y^2)$

87) $u(x,y)=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$

88) $u(r)=\ln\left(\dfrac{1}{r}\right)$; $r(x,y)=\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2}$

89) Si $F(x,y)=\dfrac{2x-y}{xy}$, determine $F_x(3,-2)$ y $F_y(3,-2)$

90) Si $F(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, determine $F_x(-1,4)$ y $F_y(-1,4)$.

91) Si $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y^2}{x}\right)$, determine $F_x\left(\sqrt{5},-2\right)$ y $F_y\left(\sqrt{5},-2\right)$

92) Si $f(x,y)=e^y\cosh x$, determine $f_x(-1,1)$ y $f_y(-1,1)$

93) Si $f(x,y,z)=3x^2y-xyz+y^2z^2$, determine lo siguiente:

94) Si $f(x,y,z)=\left(x^3+y^2+z\right)^4$, determine lo siguiente:

95) Dada $f(x,y)=x^y=\left(e^{\ln x}\right)^y$ determine $\frac{\partial f(1,0)}{\partial y};\ \frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial y^2};\ \frac{\partial^3 f(1,0)}{\partial y^3};\frac{\partial^3 f(1,0)}{\partial x^2\partial y};\frac{\partial^3 f(1,0)}{\partial x\partial y^2}$

96) Hallar $f''_{xx}(0,0),\ f''_{xy}(0,0),\ f''_{yy}(0,0)$, sí $f(x,y)=(1+x)^{m}(1+y)^{n}$.

97) Hallar $d^2z$, sí $z(x,y)=e^{xy}$

98) Hallar $d^2z$, si $z=\varphi(t)$ donde $t=x^2+y^2$

99) Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si $z=f(u,v)$ donde $u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=xy$.

100) Hallar $dz$ y $d^2z$ si $z(u,v)=u^v$, donde $u(x,y)=\frac{x}{y}, v(x,y)=xy$.

101) Hallar $d^2z$, si $z=f(u,v)$, donde $u(x)=ax, v(y)=by$.

102) Hallar $d^2z$ si $z=f(u,v)$ donde $u(x,y)=xe^y, v(x,y)=ye^x$.

103) Hallar $d^3z$ sí $z(x,y)=e^x\cos y$.

104) Hallar la diferencial de 3er orden de la función $z(x,y)=x\cos y+y\,sen\,x$.

105) Si $z=f(x,y)$, donde $x=r^2+s^2, y=2rs$, determine $\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial s}$

106) Hallar $z_{xx}$ sí $z=f(u,v);\ u(x,y)=x^2-y^2;\ v(x,y)=2xy$. Expresar la respuesta en términos de $u,v$ y las derivadas parciales de $f$.

107) Hallar $dif(1,2)$ y $d^2f(1,2)$ si $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

108) Demostrar, que si $z=f(x+ay)$, donde f es una función diferenciable, entonces $\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$

109) Demuestre que sí $\omega=f(r-s,s-t,t-r)$, entonces $\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0$

110) Suponga que todas las funciones dadas son diferenciables: Si $z=f(x,y)$, donde $x=r\cos\theta$ y $y=r\,sen\,\theta$. a) Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial\theta}$ y b) demuestre que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$

111) Si $z = f(x-y)$, demuestre que $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

112) Suponga que todas las funciones dadas tienen derivadas parciales de segundo orden continuas. Demuestre que cualquier función de la forma $z = f(x+at)+g(x-at)$ es una solución de la ecuación de onda $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (Sugerencia: sea $u(x,t)=x+at,\ v(x,t)=x-at$

113) Demostrar que la función $z = y\varphi\left(x^2-y^2\right)$ satisface a la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

114) Demostrar que la función $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$

115) Demostrar que la función $z = e^{y}\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ satisface a la ecuación $\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$

116) Mediante distintos experimentos se ha podido comprobar que una magnitud ondulatoria, como la luz, verifica la siguiente ecuación de onda $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ y la ecuación del calor $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$ son dos de las ecuaciones más importantes en física (*c* es una constante). Éstas se llaman ecuaciones diferenciales parciales. Demuestre lo siguiente:
Satisfacen la ecuación de onda.

$a) u(x,t)=\cos x\cos ct;\ \ b) u(x,t)=e^{x}\cosh(ct)\ \ c) w=sen(x+ct);\ d) w=sen(x+ct)+\cos(2x+2ct)$
$e) w=tg(2x-2ct)$

117) Demuestre que si $f$ es cualquier función dos veces diferenciable, entonces $y(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]$ satisface esta ecuación. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

118) Demostrar que la función $u(x,t)=A\,sen(a\lambda t+\varphi)\,sen\,\lambda x$ satisface a la ecuación de las vibraciones de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

119) Demostrar que la función $u(x,y,z,t)=\frac{t}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^2}e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$ ($x_0, y_0, z_0$ son constantes) satisface a la ecuación de la conductividad calorífica $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$.

120) Demostrar que la función $u=\varphi(x-at)+\psi(x-at)$, donde $\varphi$ y $\psi$ son unas funciones cualquiera, diferenciables dos veces, satisface a la ecuación de las vibraciones de la cuerda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

121) Demostrar que la función $z=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

122) Demostrar que la función $u=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\,\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

123) Demostrar que la función $z=f\left(x+\varphi(y)\right)$ satisface a la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

124) Si $z=f(x,y)$ donde $x=r\cos\theta, y=r\,sen\,\theta$, determine que: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r}$

125) La velocidad del sonido que viaja a través del agua del mar con salinidad de 35 partes por millar, está modelada por la ecuación $C(T,D)=1449.2+4.6T-0.055T^2+0.00029T^3+0.016D$ donde $C$ es la velocidad del sonido (en metros por segundo), $T$ es la temperatura (en grados Celsius) y $D$ es la profundidad por abajo de la superficie del mar (en metros). Un buzo empieza a sumergirse en el agua del mar, la profundidad del buzo y la temperatura del agua que lo rodea con respecto al tiempo se registran en las gráficas siguientes. Estime la razón de cambio, con respecto al tiempo, de la velocidad de sonido a través del agua de mar que experimentó el buzo durante una inmersión de 20 min. ¿Cuáles son las unidades?


126) La longitud $\ell$, ancho $\omega$ y altura $h$ de una caja cambia con el tiempo. En un cierto instante, las dimensiones son $\ell=1m$ y $\omega=h=2m$, y $\ell$ y $\omega$ se incrementan a razón de 2 m/s, en tanto que $h$ disminuye a razón de 3 m/s. Encuentre en ese instante las razones a las cuales las siguientes magnitudes cambian. a) El volumen. b) El área superficial. c) La longitud de la diagonal.

127) Un lado de un triángulo está creciendo a razón de 3 cm/s y un segundo lado está decreciendo a razón de 2 cm/s. Si el área del triángulo permanece constante, ¿a qué ritmo

cambia el ángulo entre los lados cuando el primer lado mide 20 cm de largo, el segundo lado es de 30 cm y el ángulo es $\frac{p}{6}$?

128) La parte de un árbol que por lo general se corta para madera es el tronco, un sólido con forma aproximada de un cilindro circular recto. Si el radio del tronco de cierto árbol crece $\frac{1}{2}$ pulgada/año y la altura aumenta 8 pulgadas/año, ¿Qué tan rápido aumenta el volumen cuando el radio es de 20 pulgadas y la altura es de 400 pulgadas? Exprese su respuesta en pies cuadrados/año (1 pie de tablón mide 1 pulgada por 12 pulgadas por 12 pulgadas).

129) Las ecuaciones del movimiento de un punto material son $x = t, y = t^2, z = t^3$ ¿Con que velocidad aumentara la distancia desde el punto al origen de coordenadas?
La distancia del punto $(0,0,0)$ al punto $P(x, y, z)$ es $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{t^2 + t^4 + t^6}$, ahora calculamos la velocidad con que aumenta la distancia del origen al punto P

130) Demostrar que la derivada de la función $z = \frac{y^2}{x}$, tomada en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = c^2$ a lo largo de la normal de la misma, es igual a cero.