REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES COMPUESTAS.

1) CASO DE UNA SOLA VARIABLE INDEPENDIENTE.

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable en x e y, y a la vez funciones diferenciables de una variable independiente t: $x = g(t)$ y $y = h(t)$, la diferenciación de la función compuesta $z = f(g(t), h(t))$ se puede calcular por la fórmula: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$$z \begin{matrix} \nearrow & x \rightarrow t \\ \searrow & y \rightarrow t \end{matrix}$$

EJEMPLO 1. Hallar $\frac{du}{dt}$, si $u(x, y) = \ln sen\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, donde $x(t) = 3t^2, y(t) = \sqrt{t^2+1}$

#1: $u(x, y) := \text{LN}\left(\text{SIN}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)$

#2: $\frac{d}{dx}\text{LN}\left(\text{SIN}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)$

#3: $$\frac{\text{COT}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\sqrt{y}}$$

#4: $\frac{d}{dy}\text{LN}\left(\text{SIN}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)$

#5: $$-\frac{x\cdot\text{COT}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{2\cdot y^{3/2}}$$

#6: $x(t) := 3\cdot t^2$

#7: $\frac{d}{dt}(3\cdot t^2)$

#8: $$6\cdot t$$

#9: $y(t) := \sqrt{(t^2 + 1)}$

#10: $\frac{d}{dt}\sqrt{(t^2 + 1)}$

#11: $$\frac{t}{\sqrt{(t^2 + 1)}}$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

$$u \begin{array}{l} \nearrow \; x \to t \\ \searrow \; y \to t \end{array} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

#12: $\frac{\mathrm{COT}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{\sqrt{y}}\cdot(6\cdot t) + \left(-\frac{x\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{2\cdot y^{3/2}}\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{(t^2 + 1)}}$

#13: $\frac{t\cdot(12\cdot y\cdot\sqrt{(t^2 + 1)} - x)\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{2\cdot y^{3/2}\cdot\sqrt{(t^2 + 1)}}$

Se sustituye los valores de x, y en función de t.

#14: $\frac{3\cdot t\cdot(3\cdot t^2 + 4)\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{3\cdot t^2}{(t^2 + 1)^{1/4}}\right)}{2\cdot(t^2 + 1)^{5/4}}$

En forma directa, se puede escribir en la barra de expresiones.
Recuerde utilizar el procedimiento: OPCIONES, AJUSTE DE MODO, INTRODUCCIÓN, Y EN MODO, SELECCIONAR PALABRAS. Para que pueda colocar la siguiente expresión:
du/dt = ∂(LN(SIN(x/√y)), x)·∂(3·t^2, t) + ∂(LN(SIN(x/√y)), y)·∂(√(t^2 + 1), t)

#15: InputMode := Word

#16: $\frac{du}{dt} = \left(\frac{d}{dx}\ \mathrm{LN}\left(\mathrm{SIN}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)\right)\cdot\frac{d}{dt}\ (3\cdot t^2) + \left(\frac{d}{dy}\ \mathrm{LN}\left(\mathrm{SIN}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)\right)\cdot\frac{d}{dt}\ \sqrt{(t^2 + 1)}$

#17: $\frac{du}{dt} = \frac{t\cdot(12\cdot y\cdot\sqrt{(t^2 + 1)} - x)\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)}{2\cdot y^{3/2}\cdot\sqrt{(t^2 + 1)}}$

Se sustituye los valores de x, y en función de t.

#18: $\frac{du}{dt} = \frac{3\cdot t\cdot(3\cdot t^2 + 4)\cdot\mathrm{COT}\left(\frac{3\cdot t^2}{(t^2 + 1)^{1/4}}\right)}{2\cdot(t^2 + 1)^{5/4}}$

Nota: se recomienda trabajar con dos archivos a la vez, para evitar errores en aplicar la fórmula directa.

2) CASO DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

Si $w = f(u,v)$ y $u = g(x,y)$, $v = k(x,y)$ donde f, g, y k son diferenciables, entonces.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

$$\begin{array}{ccccc} & & & \nearrow & x\\ & & u & & \\ & \nearrow & & \searrow & y\\ w & & & \nearrow & x\\ & \searrow & v & & \\ & & & \searrow & y\end{array}$$

EJEMPLO 2. Sean $w(r,s)=r^3+s^2;\ r(p,q)=pq^2;\ s(p,q)=p^2sen(q)$ aplique la regla de la cadena para determinar $\frac{\partial w}{\partial p};\frac{\partial w}{\partial q}$

a) aplicamos las fórmulas de la regla de la cadena.

$$\begin{array}{ccccc} & & & \nearrow & p\\ & & r & & \\ & \nearrow & & \searrow & q\\ w & & & \nearrow & p\\ & \searrow & s & & \\ & & & \searrow & q\end{array}$$

$$\frac{\partial w}{\partial p}=\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p}; \qquad \frac{\partial w}{\partial q}=\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial q}$$

b) Se calcula cada derivada parcial de acuerdo a la regla de la cadena anterior.

#1: $w(r, s) := r^3 + s^2$

#2: $\frac{d}{dr}(r^3 + s^2)$

#3: $3\cdot r^2$

#4: $\frac{d}{ds}(r^3 + s^2)$

#5: $2\cdot s$

#6: $r(p, q) := p\cdot q^2$

#7: $\frac{d}{dp}(p\cdot q^2)$

#8: q^2

#9: $\frac{d}{dq}(p\cdot q^2)$

#10: $2\cdot p\cdot q$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#11: $s(p, q) := p^2 \cdot SIN(q)$

#12: $\frac{d}{dp}(p^2 \cdot SIN(q))$

#13: $2 \cdot p \cdot SIN(q)$

#14: $\frac{d}{dq}(p^2 \cdot SIN(q))$

#15: $p^2 \cdot COS(q)$

c) Se sustituyen los resultados obtenidos, y se resuelve.

Para la ecuación $\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p}$

#16: $\frac{\partial(w)}{\partial(p)} = (3 \cdot r^2) \cdot q^2 + (2 \cdot s) \cdot (2 \cdot p \cdot SIN(q))$

#17: $\frac{\partial(w)}{\partial(p)} = 4 \cdot p \cdot s \cdot SIN(q) + 3 \cdot q^2 \cdot r^2$

se sustituyen r y s por sus valores originales

#18: $4 \cdot p^3 \cdot SIN(q)^2 + 3 \cdot p^2 \cdot q^6$

Otra forma es colocar en la barra de edición de expresiones la orden:

∂(w)/∂(p) = ∂(r^3 + s^2, r)·∂(p·q^2, p) + ∂(r^3 + s^2, s)·∂(p^2·SIN(q), p)

#19: $\frac{\partial(w)}{\partial(p)} = \left(\frac{d}{dr}(r^3 + s^2)\right) \cdot \frac{d}{dp}(p \cdot q^2) + \left(\frac{d}{ds}(r^3 + s^2)\right) \cdot \frac{d}{dp}(p^2 \cdot SIN(q))$

#20: $\frac{\partial(w)}{\partial(p)} = 4 \cdot p \cdot s \cdot SIN(q) + 3 \cdot q^2 \cdot r^2$

#21: $\frac{\partial(w)}{\partial(p)} = 4 \cdot p^3 \cdot SIN(q)^2 + 3 \cdot p^2 \cdot q^6$

Para la ecuación $\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial q}$

#22: $\frac{\partial(w)}{\partial(q)} = (3 \cdot r^2) \cdot (2 \cdot p \cdot q) + (2 \cdot s) \cdot (p^2 \cdot COS(q))$

#23: $\frac{\partial(w)}{\partial(q)} = 2 \cdot p^2 \cdot s \cdot COS(q) + 6 \cdot p \cdot q \cdot r^2$

#24: $\frac{\partial(w)}{\partial(q)} = 2 \cdot p^4 \cdot SIN(q) \cdot COS(q) + 6 \cdot p^3 \cdot q^5$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

En forma directa:

∂(w)/∂(q) = ∂(r^3 + s^2, r)·∂(p·q^2, q) + ∂(r^3 + s^2, s)·∂(p^2·SIN(q), q)

$$\#25: \quad \frac{\partial(w)}{\partial(q)} = \left(\frac{d}{dr}(r^3 + s^2)\right)\cdot\frac{d}{dq}(p\cdot q^2) + \left(\frac{d}{ds}(r^3 + s^2)\right)\cdot\frac{d}{dq}(p^2\cdot \mathrm{SIN}(q))$$

$$\#26: \quad \frac{\partial(w)}{\partial(q)} = 2\cdot p^2\cdot s\cdot \mathrm{COS}(q) + 6\cdot p\cdot q\cdot r^2$$

$$\#27: \quad \frac{\partial(w)}{\partial(q)} = 2\cdot p^4\cdot \mathrm{SIN}(q)\cdot \mathrm{COS}(q) + 6\cdot p^3\cdot q^5$$

Nota: Obsérvese que después de aplicar la regla de la cadena, se sustituyeron los valores de las variables r y s con lo cual $\frac{\partial w}{\partial p}; \frac{\partial w}{\partial q}$ quedaron expresadas en términos de p y q, recalcando que w es una función compuesta de dos variables p y q.

Si w es una función de u, v y r, donde u, v y r son cada una funciones de *x*, *y*, *z*, y se desea encontrar $\frac{\partial w}{\partial y}$ se toman los productos de los pares de derivadas parciales que llevan de w a *y*, y se suman. $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$

EJEMPLO 3. Sean:

$w(r,s,v,t) = r^2 + sv + t^3;\ r(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2;\ s(x,y,z) = xyz;\ v(x,y,z) = xe^y;\ t(x,y,z) = yz^2$

Aplique la regla de la cadena para determinar $\frac{\partial w}{\partial z}$

Nótese que w es una función de r, s, v, t, y que cada una de estas cuatros variables es a su vez función de x, y, y z, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

En forma directa:

∂(W)/∂(z) = ∂(R^2 + S·V + T^3, R)·∂(x^2 + y^2 + z^2, z) + ∂(R^2 + S·V + T^3, S)·∂(x·y·z, z)+∂(R^2 + S·V + T^3, V)·∂(xe^y, z)+∂(R^2 + S·V + T^3, T)·∂(y·z^2, z)

$$\#1: \quad \frac{\partial(w)}{\partial(z)} = \left(\frac{d}{dr}(r^2 + s\cdot v + t^3)\right)\cdot\frac{d}{dz}(x^2 + y^2 + z^2) + \left(\frac{d}{ds}(r^2 + s\cdot v + t^3)\right)\cdot\frac{d}{dz}(x\cdot y\cdot z) + \left(\frac{d}{dv}(r^2 + s\cdot v + t^3)\right)\cdot\frac{d}{dz}(x\cdot e^y) + \left(\frac{d}{dt}(r^2 + s\cdot v + t^3)\right)\cdot\frac{d}{dz}(y\cdot z^2)$$

$$\#2: \quad \frac{\partial(w)}{\partial(z)} = v\cdot x\cdot y + 6\cdot t^2\cdot y\cdot z + 4\cdot r\cdot z$$

Sustituimos los valores ***r, s, v*** y ***t***

$$\#3: \quad \frac{\partial(w)}{\partial(z)} = x^2\cdot y\cdot e^y + 2\cdot z\cdot(2\cdot x^2 + 3\cdot y^3\cdot z^4 + 2\cdot y^2 + 2\cdot z^2)$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

La regla de la cadena es útil para resolver problemas de rapidez de variación relacionada, (Razones afines) ver guía de ejercicios en la página Web del autor, en trayecto I (Ing. Procesos Químicos).

EJEMPLO 4: En un circuito eléctrico simple se tienen una resistencia R y una tensión V. En cierto momento V vale 80 voltios y crece a razón de 5 Voltios/ min. Mientras que R es de 40 ohm y disminuye a razón de 20ohm/min. Usar la ley de Ohm y la regla de la cadena para calcular la rapidez de variación de la corriente I (en ampere).

Según la ley de Ohm. $I = \frac{V}{R}$ Entonces I es función de V y R y tanto V como R son funciones de t (min), aplicando la regla de la cadena nos queda: $\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial t}$

#1: $I(R, V) := \frac{V}{R}$

#2: $\frac{\partial(I(R, V))}{\partial(t)} = \frac{\partial(I(R, V))}{\partial(V)} \cdot \frac{\partial(V)}{\partial(t)} + \frac{\partial(I(R, V))}{\partial(R)} \cdot \frac{\partial(R)}{\partial(t)}$

#3: $\frac{d}{dV} \frac{V}{R}$

#4: $\frac{1}{R}$

#5: $\frac{d}{dR} \frac{V}{R}$

#6: $-\frac{V}{R^2}$

Ahora sustituimos los resultados y los datos

#7: $\frac{\partial(I(R, V))}{\partial(t)} = \frac{1}{R} \cdot 5 + \frac{1}{R} \cdot 40$

#8: $\frac{\partial(I(40, 80))}{\partial(t)} = \frac{9}{8}$

DERIVACIÓN IMPLICITA CON DERIVADAS PARCIALES (REGLA DE LA CADENA)

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente a ***y*** como función derivable de ***x***, La derivada de la función implícita puede calcularse: o bien despejando la *y*, o bien, mediante la siguiente fórmula:

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Entonces: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$

Si la ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente a ***z*** como función diferenciable de ***x e y,*** entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\qquad \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$$

EJEMPLO 5. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ dado que $y^3+y^2-5y-x^2+4=0$

Empezamos a definir una función F como: $F(x,y)=y^3+y^2-5y-x^2+4$

#1: $f(x,\ y) := y^3 + y^2 - 5\cdot y - x^2 + 4$

#2: $\dfrac{d}{dx}(y^3 + y^2 - 5\cdot y - x^2 + 4)$

#3: $-2\cdot x$

#4: $\dfrac{d}{dy}(y^3 + y^2 - 5\cdot y - x^2 + 4)$

#5: $3\cdot y^2 + 2\cdot y - 5$

#6: $\dfrac{\partial(y)}{\partial(x)} = -\dfrac{-2\cdot x}{3\cdot y^2 + 2\cdot y - 5}$

#7: $\dfrac{\partial(y)}{\partial(x)} = \dfrac{2\cdot x}{3\cdot y^2 + 2\cdot y - 5}$

En forma directa:

∂(y)/∂(x) = -(∂(y^3+y^2-5y-x^2+4,x))/(∂(y^3+y^2-5y-x^2+4,y))

#8: $\dfrac{\partial(y)}{\partial(x)} = -\dfrac{\frac{d}{dx}(y^3 + y^2 - 5\cdot y - x^2 + 4)}{\frac{d}{dy}(y^3 + y^2 - 5\cdot y - x^2 + 4)}$

#9: $\dfrac{\partial(y)}{\partial(x)} = \dfrac{2\cdot x}{3\cdot y^2 + 2\cdot y - 5}$

EJEMPLO 6: Sea $x^2z^2+xy^2-z^3+4yz-5=0$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x};\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$

Empezamos a definir una función F como: $F(x,y,z)=x^2z^2+xy^2-z^3+4yz-5$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Forma directa:

∂(z)/∂(x) = - ∂(x^2z^2+xy^2 -z^3+ 4yz-5, x)/∂(x^2z^2+xy^2 -z^3+ 4yz-5,z)

$$\#10: \quad \frac{\partial(z)}{\partial(x)} = - \frac{\frac{d}{dx}(x^2 \cdot z^2 + x \cdot y^2 - z^3 + 4 \cdot y \cdot z - 5)}{\frac{d}{dz}(x^2 \cdot z^2 + x \cdot y^2 - z^3 + 4 \cdot y \cdot z - 5)}$$

$$\#11: \quad \frac{\partial(z)}{\partial(x)} = - \frac{2 \cdot x \cdot z^2 + y^2}{2 \cdot x^2 \cdot z + 4 \cdot y - 3 \cdot z^2}$$

∂(z)/∂(y) = - ∂(x^2z^2+xy^2 -z^3+ 4yz-5, y)/∂(x^2z^2+xy^2 -z^3+ 4yz-5,z)

$$\#12: \quad \frac{\partial(z)}{\partial(y)} = - \frac{\frac{d}{dy}(x^2 \cdot z^2 + x \cdot y^2 - z^3 + 4 \cdot y \cdot z - 5)}{\frac{d}{dz}(x^2 \cdot z^2 + x \cdot y^2 - z^3 + 4 \cdot y \cdot z - 5)}$$

$$\#13: \quad \frac{\partial(z)}{\partial(y)} = - \frac{2 \cdot (x \cdot y + 2 \cdot z)}{2 \cdot x^2 \cdot z + 4 \cdot y - 3 \cdot z^2}$$

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Las derivadas parciales $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ puede ser derivadas a su vez parcialmente con respecto a las variables, x e y, dando las segundas derivadas parciales.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

Nota: Si la función f(x, y) y sus derivadas parciales son continuas, el orden de derivación resulta irrelevante, es decir:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}; \quad f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

Nota: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ Esto significa que se deriva primero con respecto a Y y el resultado se deriva con respecto a X.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ Esto significa que se deriva primero con respecto a X y el resultado se deriva con respecto a Y.

EJEMPLO 7: Dada la función $f(x,y) = e^{(senx)(\cos y)}$ Determine: $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

#1: $f(x, y) := e^{SIN(x) \cdot COS(y)}$

#2: $\frac{d}{dx} e^{SIN(x) \cdot COS(y)}$

#3: $e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot COS(x) \cdot COS(y)$

#4: $\frac{d}{dx} (e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot COS(x) \cdot COS(y))$

#5: $e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot (COS(x)^2 \cdot COS(y)^2 - SIN(x) \cdot COS(y))$

#6: $\frac{d}{dy} (e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot COS(x) \cdot COS(y))$

#7: $- e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot COS(x) \cdot (SIN(x) \cdot SIN(y) \cdot COS(y) + SIN(y))$

#8: $\frac{d}{dy} e^{SIN(x) \cdot COS(y)}$

#9: $- e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot SIN(x) \cdot SIN(y)$

#10: $\frac{d}{dy} (- e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot SIN(x) \cdot SIN(y))$

#11: $e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot (SIN(x)^2 \cdot SIN(y)^2 - SIN(x) \cdot COS(y))$

#12: $\frac{d}{dx} (- e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot SIN(x) \cdot SIN(y))$

#13: $- e^{SIN(x) \cdot COS(y)} \cdot COS(x) \cdot (SIN(x) \cdot SIN(y) \cdot COS(y) + SIN(y))$

EJEMPLO 8: Dada la función $f(x,y) = xy^4$ Determine $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$

Procedimiento: cálculo, derivadas, variable: y; orden 2; y aplicar si

#7: $x \cdot y^4$

#8: $\left(\frac{d}{dy}\right)^2 (x \cdot y^4)$

Ahora seleccionamos la nueva expresión y seguimos un procedimiento similar al anterior, tomando en cuenta la variable y el orden respectivo.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#9: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}\right)^2 (x\cdot y^4)$

#10: $12\cdot y^2$

Otra forma de realizar esta operación, derivar y simplificar directamente es:

DIF(DIF(x·y^4,Y,2),X) y simplificar.

#11: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}\right)^2 (x\cdot y^4)$

#12: $12\cdot y^2$

EJEMPLO 9: Obtener las segundas derivadas parciales de la función continua dada:

$$f(x,y)=x^3y^2-2x^2y+3x \quad a)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Parte a:

#13: $x^3\cdot y^2 - 2\cdot x^2\cdot y - 3\cdot x$

#14: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x^3\cdot y^2 - 2\cdot x^2\cdot y - 3\cdot x)$

#15: $6\cdot x\cdot y^2 - 4\cdot y$

Parte b:

#20: $\left(\frac{d}{dy}\right)^2 (x^3\cdot y^2 - 2\cdot x^2\cdot y - 3\cdot x)$

#21: $2\cdot x^3$

Una función de dos variables que satisface la ecuación de Laplace, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ se dice que es **ARMÓNICA.**

EJEMPLO 10: Demuestre que la función dada por $w(x,y,z)=(sen(ax))(\cos(by))e^{-\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)z}$ Satisface la ecuación de Laplace en tres dimensiones. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$

#1: $\mathrm{SIN}(a\cdot x)\cdot \mathrm{COS}(b\cdot y)\cdot e^{-\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot z}$

#2: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(\mathrm{SIN}(a\cdot x)\cdot \mathrm{COS}(b\cdot y)\cdot e^{-\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot z}\right)$

#3: $-a^2\cdot e^{-z\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot \mathrm{SIN}(a\cdot x)\cdot \mathrm{COS}(b\cdot y)$

#4: $\left(\frac{d}{dy}\right)^2 \left(SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)\cdot e^{-\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot z}\right)$

#5: $-b^2\cdot e^{-z\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)$

#6: $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left(SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)\cdot e^{-\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot z}\right)$

#7: $e^{-z\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot(a^2+b^2)\cdot SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)$

#8: $-a^2\cdot e^{-z\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y) + -b^2\cdot e^{-z\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y) + e^{-z\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot(a^2+b^2)\cdot SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)$

#9: 0

En forma directa:

∂(SIN(a·x)·COS(b·y)·e^(- √(a^2 + b^2)·z),x,2)+∂(SIN(a·x)·COS(b·y)·e^(- √(a^2 + b^2)·z),y,2)+∂(SIN(a·x)·COS(b·y)·e^(- √(a^2 + b^2)·z),z,2)

#14: $w(x, y, z) := SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)\cdot e^{-\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot z}$

#15: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)\cdot e^{-\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot z}\right) + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 \left(SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)\cdot e^{-\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot z}\right) + \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left(SIN(a\cdot x)\cdot COS(b\cdot y)\cdot e^{-\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot z}\right)$

#16: 0

IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES CRUZADAS

Si f es una función continua entonces para todo (x, y) perteneciente al dominio se verifica que las derivadas cruzadas son iguales.

En dos variables sería: Si $f : D \to R^2 \; con \, D \subseteq R^2$ y $f(x, y)$ **ES CONTINUA**, entonces:

$$\forall (x, y) \, se \;\; verifica \;\; que \; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

EJEMPLO 11. Demuestre si la función dada es continua $f(x, y) = arctg(xy)$

#1: $f(x, y) := ATAN(x\cdot y)$

#2: $\frac{d}{dx} ATAN(x\cdot y)$

#3: $\frac{y}{x^2\cdot y^2 + 1}$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#4: $\dfrac{d}{dy}\dfrac{y}{x^2\cdot y^2+1}$

#5: $\dfrac{1-x^2\cdot y^2}{(x^2\cdot y^2+1)^2}$

#6: $\dfrac{d}{dy}\text{ATAN}(x\cdot y)$

#7: $\dfrac{x}{x^2\cdot y^2+1}$

#8: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{x^2\cdot y^2+1}$

#9: $\dfrac{1-x^2\cdot y^2}{(x^2\cdot y^2+1)^2}$

Se puede observar que la función es continua.
Forma directa:
∂(∂(ATAN(x·y), x),y)=∂(∂(ATAN(x·y), y),x)

#10: f(x, y) := ATAN(x·y)

#11: $\dfrac{d}{dy}\dfrac{d}{dx}\text{ATAN}(x\cdot y)=\dfrac{d}{dx}\dfrac{d}{dy}\text{ATAN}(x\cdot y)$

#12: $\dfrac{1-x^2\cdot y^2}{(x^2\cdot y^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2\cdot y^2}{(x^2\cdot y^2+1)^2}$

APLICACIONES:

EJEMPLO 12. La presión de un mol de gas ideal se incrementa a razón de $0.05\dfrac{KPa}{s}$ y la temperatura aumenta a razón de $0.15\dfrac{K}{s}$ Determinar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de $20KPa$ y la temperatura es de 320 K.

$$PV=RT\Rightarrow V(P,T)=\frac{RT}{P};\ P(t);\ T(t)$$

$$V\begin{array}{l}\nearrow P\rightarrow t\\ \searrow T\rightarrow t\end{array}\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial P}\left(\frac{dP}{dt}\right)+\frac{\partial V}{\partial T}\left(\frac{dT}{dt}\right)$$

#13: $V(P, T) := \frac{R \cdot T}{P}$

#14: $\frac{d}{dP} \frac{R \cdot T}{P}$

#15: $-\frac{R \cdot T}{P^2}$

#16: $\frac{d}{dT} \frac{R \cdot T}{P}$

#17: $\frac{R}{P}$

#18: InputMode := Word

#19: $\frac{dv}{dt} = \left(\frac{d}{dP} \frac{R \cdot T}{P}\right) \cdot \frac{dP}{dt} + \left(\frac{d}{dT} \frac{R \cdot T}{P}\right) \cdot \frac{dT}{dt}$

#20: $\frac{dv}{dt} = \left(-\frac{R \cdot T}{P^2}\right) \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{R}{P} \cdot \frac{dT}{dt}$

#21: $\frac{dv}{dt} = \left(-\frac{R \cdot T}{P^2}\right) \cdot 0.05 + \frac{R}{P} \cdot 0.15$

#22: $\frac{dv}{dt} = -\frac{10803}{40000}$

#23: $\frac{dv}{dt} = -0.270075$

EJEMPLO 13. Demuestre que la función dada $u(t,x) = e^{-ct} sen\, x$ satisface la ecuación del calor. $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$

#1: $u(x, t) := e^{-c \cdot t} \cdot SIN(x)$

#2: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (e^{-c \cdot t} \cdot SIN(x))$

#3: $-e^{-c \cdot t} \cdot SIN(x)$

#4: $\frac{d}{dt} (e^{-c \cdot t} \cdot SIN(x))$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#5: $$-c\cdot e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

#6: $$c^{2}\cdot(-e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x)) = -c\cdot e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

#7: $$-c^{2}\cdot e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x) = -c\cdot e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

En forma directa:

c^2(∂(e^(- c·t)·SIN(x), x, 2))=∂(e^(- c·t)·SIN(x), t)

#8: $$c^{2}\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{2}(e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x)) = \frac{d}{dt}(e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x))$$

#9: $$-c^{2}\cdot e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x) = -c\cdot e^{-c\cdot t}\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas