PLANOS TANGENTES RECTAS NORMALES A LA SUPERFICIE

Sea **S** la superficie dada por $F(x,y,z)=0$ y sea $P(x_0,y_0,z_0)$ un punto de **S.** Sea **C** una curva sobre **S** que pasa por **P**, definida por la función vectorial $r(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$, entonces, para todo ***t*** $F(x(t),y(t),z(t))=0$

Si **F** es diferenciable y existen $x'(t),y'(t),z'(t)$ se sigue de la regla de la cadena que

$$0=F'(t)=\frac{\partial F}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}y'(t)'+\frac{\partial F}{\partial z}z'(t)$$

En (x_0,y_0,z_0) la forma vectorial equivalente es: $\nabla F(x_0,y_0,z_0).r'(t_0)=0$ es decir el producto escalar del gradiente por el vector tangente.

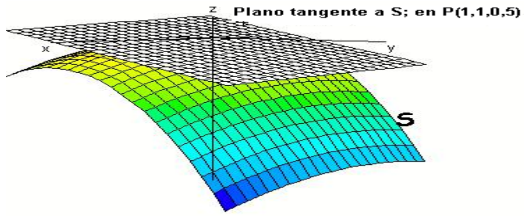
Este resultado significa que el gradiente en **P** es ortogonal al vector tangente de cualquier curva contenida en **S** que pase por **P.** Así pues, todas las rectas tangentes en **P** están en un plano que es normal a $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ y contiene a **P**

DEFINICIÓN DE PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ de la superficie S dada por $F(x,y,z)=0$ con $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

DEFINICIÓN 1: Se llama **PLANO TANGENTE** a una superficie (S) en un punto P de la misma, al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto P.

DEFINICIÓN 2: El plano que pasa por **P** y es normal a $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ se llama el **PLANO TANGENTE** a **S** en **P**



Si la superficie está definida de **manera implícita** por la ecuación $F(x,y,z)=0$, entonces:

Teorema Si F es diferenciable en (x_0,y_0,z_0) una ecuación del **PLANO TANGENTE** a la superficie dada por $F(x,y,z)=0$ en (x_0,y_0,z_0) es:

$$\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0)=0(*)$$

Para calcular la ecuación del plano tangente en un punto a una superficie dada en la forma $z=f(x,y)$, (superficie definida de **manera explícita**), basta definir la función $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ con ello, S es la superficie de nivel $F(x,y,z)=0$ y la **ecuación del PLANO TANGENTE** a **S** en el punto $p_0(x_0,y_0,z_0)$ es:

$$z-z_0=F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0);z-z_0=\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)(**)$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

La ecuación del plano tangente se puede utilizar para calcular el valor aproximado de una función. Gráficamente significa medir el valor de la función sobre el plano tangente y no sobre la superficie.

EJEMPLO 1. Determinar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2y - 2$ en el punto $P(1,2,3)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2x + 2 \Rightarrow si\ P(1,2,3) \Rightarrow \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_P = -2; \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_P = 4$$

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_0) \Rightarrow z - 3 = -2(x-1) + 4(y-2) \Rightarrow z = -2x + 4y - 3$$

$$: \frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P} = \frac{z - z_0}{-1} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}$$

EJEMPLO 2. Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto $(2,-1,5)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \quad si\ P(2,-1,5) \Rightarrow \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_P = 4; \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_P = -2$$

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y - y_0) \Rightarrow z - 5 = 4(x-2) - 2(y+1) \Rightarrow z = 4x - 2y - 5$$

Ahora aplicando **DERIVE**

EJEMPLO 3. Encontrar una ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{3x^2}{4} + 3y^2 + z^2 = 12$, en el punto, $P_0(2,1,\sqrt{6})$ realice la gráfica.

#1: $f(x, y, z) := \frac{3}{4}\cdot x^2 + 3\cdot y^2 + z^2 - 12$

Se calculan las derivadas parciales.

#2: $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}\cdot x^2 + 3\cdot y^2 + z^2 - 12\right)$

#3: $\frac{3\cdot x}{2}$

#4: $\frac{d}{dy}\left(\frac{3}{4}\cdot x^2 + 3\cdot y^2 + z^2 - 12\right)$

#5: $6\cdot y$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#6: $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{3}{4}\cdot x^2 + 3\cdot y^2 + z^2 - 12\right)$

#7: $2\cdot z$

Se sustituye el punto dado en cada una de las derivadas parciales

#8: 3

#9: 6

#10: $2\cdot\sqrt{6}$

se aplica la ecuación (*)

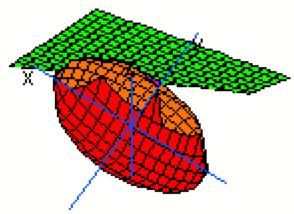
#11: $3\cdot(x - 2) + 6\cdot(y - 1) + 2\cdot\sqrt{6}\cdot(z - \sqrt{6}) = 0$

#12: $3\cdot x + 6\cdot y + 2\cdot\sqrt{6}\cdot z - 24 = 0$

Se realiza la gráfica buscando una visón que indique la tangencia del plano

#13: SOLVE$\left(\dfrac{3}{4}\cdot x^2 + 3\cdot y^2 + z^2 - 12, z\right)$

#14: $z = -\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(-x^2 - 4\cdot(y^2 - 4))}}{2} \vee z = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(-x^2 - 4\cdot(y^2 - 4))}}{2}$



El plano tangente en el punto $P_0(2,1,\sqrt{6})$ tiene un vector normal $\nabla\vec{f}(2,1,\sqrt{6}) = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\sqrt{6}\hat{k}$ (ver primera definición).

EJEMPLO 4. Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = 1 - \dfrac{x^2 + 4y^2}{10}$ en el punto $(1,1,\frac{1}{2})$

#1: $F(x, y) := 1 - \dfrac{x^2 + 4\cdot y^2}{10}$

#2: $\dfrac{d}{dx}\left(1 - \dfrac{x^2 + 4\cdot y^2}{10}\right)$

#3: $-\dfrac{x}{5}$

#4: $-\dfrac{1}{5}$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#5: $\dfrac{d}{dy}\left(1 - \dfrac{x^2 + 4\cdot y^2}{10}\right)$

#6: $-\dfrac{4\cdot y}{5}$

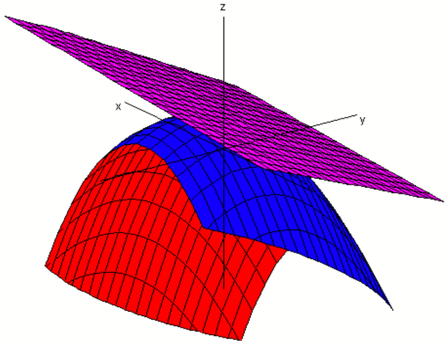
#7: $-\dfrac{4}{5}$

Aplicando la ecuación (**)

#8: $-\dfrac{1}{5}\cdot(x-1) - \dfrac{4}{5}\cdot(y-1) - \left(z - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

#9: $-\dfrac{2\cdot x + 8\cdot y + 5\cdot(2\cdot z - 3)}{10} = 0$

#10: $x + 5\cdot z + 4\cdot y = \dfrac{15}{2}$



NOTA: Puede aplicar la definición de gradiente, para resolver los ejercicios anteriores

DEFINICIÓN 1: Se llama **RECTA NORMAL** a una superficie, a la recta que pasa por un punto P y es perpendicular al plano tangente.

DEFINICIÓN 2: La recta que pasa por P con la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se llama la **RECTA NORMAL** a **S** en **P**

Si la superficie está definida de **manera implícita** por la ecuación $F(x,y,z)=0$, entonces las ecuaciones de la **RECTA NORMAL** en (x_0, y_0, z_0) es

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{(y-y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{(z-z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Para calcular la ecuación de la recta tangente en un punto a una superficie dada en la forma $z = f(x,y)$, (superficie definida de **manera explícita**), basta definir la función $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ con ello, S es la superficie de nivel Y la ecuación de la **RECTA NORMAL**: $\dfrac{x-x_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)} = \dfrac{y-y_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

RECTA TANGENTE Y PLANO NORMAL A UNA CURVA EN EL ESPACIO.

Una curva en el espacio se puede definir paramétricamente por las ecuaciones $x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)$ en el punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ de la curva las **ecuaciones de la RECTA TANGENTE** son: $\dfrac{x - x_0}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{y - y_0}{\dfrac{dy}{dt}} = \dfrac{z - z_0}{\dfrac{dz}{dt}}$

Y la ecuación **del PLANO NORMAL** (el plano que pasa por el punto dado perpendicular a la recta tangente allí) es: $\dfrac{dx}{dt}(x - x_0) + \dfrac{dy}{dt}(y - y_0) + = \dfrac{dz}{dt}(z - z_0) = 0$

EJEMPLO 5. Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie $xyz = 12$ en el punto $(2, -2, -3)$

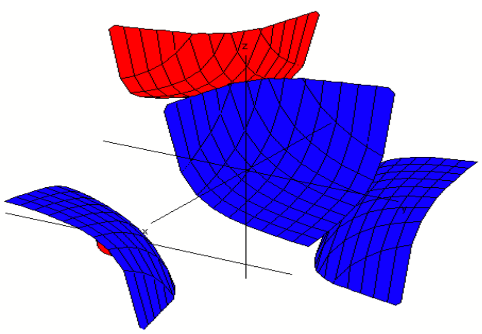
```
#11:  F(x, y, z) := x·y·z - 12

#12:  GRAD(x·y·z - 12)

#13:                                              [y·z, x·z, x·y]

SUSTITUIR EL PUNTO DADO

#14:                                              [6, -6, -4]
```

Su gradiente en el punto dado es $\nabla \vec{F}(2, -2, -3) = 6\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k}$, la recta normal en el punto $(2, -2, -3)$ tiene números de dirección 6, -6 y -4, luego el conjunto de ecuaciones simétricas es: $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+3}{-4}$

Para graficar, pasamos las ecuaciones simétricas de la recta, en ecuaciones paramétricas.

```
#14:  [2 + 6·t, -2 - 6·t, -3 + 4·t]
```

#15: $z = \dfrac{12}{x \cdot y}$



EJEMPLO 6. Describir la recta tangente a la curva intersección de las superficies: $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20\ (Elipsoide) \quad x^2 + y^2 + z = 4\ (Paraboloide)\ en\ el\ \ punto\ (0,1,3)$

Se calculan los gradientes de las dos superficies en el punto dado.

#15: $W(x, y, z) := x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 - 20$

#16: $\mathrm{GRAD}(x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 - 20)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#17: $[2\cdot x,\ 4\cdot y,\ 4\cdot z]$

#18: $[0,\ 4,\ 12]$

#19: $G(x,\ y,\ z) := x^2 + y^2 + z - 4$

#20: $GRAD(x^2 + y^2 + z - 4)$

#21: $[2\cdot x,\ 2\cdot y,\ 1]$

#22: $[0,\ 2,\ 1]$

El producto vectorial de estos dos vectores es el vector tangente a ambas superficies en el punto dado.

#23: $[0,\ 4,\ 12] \times [0,\ 2,\ 1]$

#24: $[-20,\ 0,\ 0]$

Entonces, la recta tangente a la curva intersección de las dos superficies en el punto (0, 1, 3) es una recta paralela al eje x que pasa por ese punto.

Para graficar las superficies y el vector tangente

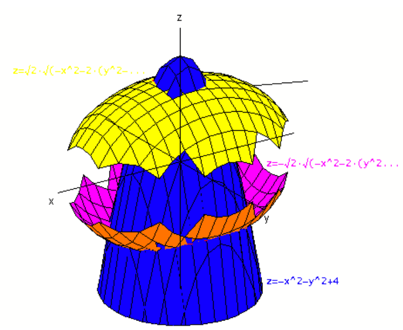
#25: $SOLVE(x^2 + 2\cdot y^2 + 2\cdot z^2 - 20,\ z,\ Real)$

#26: $z = -\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-x^2 - 2\cdot(y^2 - 10))}}{2} \lor z = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-x^2 - 2\cdot(y^2 - 10))}}{2}$

#27: $SOLVE(x^2 + y^2 + z - 4,\ z,\ Real)$

#28: $z = -x^2 - y^2 + 4$

#29: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



EJEMPLO 7. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ en el punto t = 1

En el punto $t = 1 \Rightarrow x = 1,\ y = 1,\ z = 1 \Rightarrow P(1,1,1)$

#40: $x(t) := t$

#41: $\dfrac{d}{dt}\ t$

#42: 1

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#43: $y(t) := t^2$

#44: $\frac{d}{dt} t^2$

#45: $2\cdot t$

se sustituye el valor de t

#46: 2

#47: $z(t) := t^3$

#48: $\frac{d}{dt} t^3$

#49: $3\cdot t^2$

se sustituye el valor de t

#50: 3

Ecuación de la recta tangente:

#51: $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$

Ecuación del plano normal:

#52: $1\cdot(x - 1) + 2\cdot(y - 1) + 3\cdot(z - 1) = 0$

Se aplica: **RESOLVER, EXPRESIÓN**, seleccionar todas las variables, y **RESOLVER**

#53: SOLVE(1·(x − 1) + 2·(y − 1) + 3·(z − 1) = 0, [x, z, y])

#54: $x + 3\cdot z + 2\cdot y = 6$

ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UN PLANO.

El ángulo de inclinación de un plano se define como el ángulo $\theta;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, entre el plano dado y el plano x y. El ángulo de inclinación de un plano horizontal se toma igual a 0, por definición. Como el vector $\vec{k}$ es normal al plano x y, podemos concluir de la fórmula del coseno del ángulo entre planos que el ángulo de inclinación de un plano con vector normal $\vec{n}$ viene dado por: $\cos\theta = \frac{|\vec{n}\bullet\vec{k}|}{\|\vec{n}\|}$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 8. Calcular el ángulo de inclinación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{3}=1$ en el punto $(2,2,1)$

#30: $E(x, y, z) := \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1$

#31: $\mathrm{GRAD}\left(\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1\right)$

#32: $\left[\frac{x}{6}, \frac{y}{6}, \frac{2\cdot z}{3}\right]$

#33: $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

Sabemos que el gradiente en el punto dado es normal al plano tangente y $\vec{k}$ **(vector unitario)** es normal al plano xy, el ángulo de inclinación del plano tangente viene dado por.

#34: $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cdot [0, 0, 1]$

#35: $\frac{2}{3}$

#36: $\left|\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right|$

#37: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

#38: $\mathrm{COS}\theta = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

#39: $\mathrm{COS}\theta = 0.8164965809$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas