EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES
(MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES)

Para comprender algunos términos en esta sección, debemos introducir cierto lenguaje relativo a los espacios de dimensión mayor del plano

Por una **VECINDAD** de radio δ de un punto P entendemos el conjunto de todos los puntos Q que satisfacen $\|Q-P\|<\delta$. En el espacio tridimensional es el interior de una esfera.

Un punto P es un **PUNTO INTERIOR** de un conjunto dado (S), si existe una vecindad de P contenida en ese conjunto (S). El conjunto de todos los puntos interiores de S es el **INTERIOR** del conjunto dado (S).

P es un **PUNTO FRONTERA** del conjunto (S) si cada vecindad de P contiene puntos que están en S y puntos que no están en S. El conjunto de todos los puntos frontera de S es la **FRONTERA** de S.
Un conjunto es **ABIERTO** si todos sus puntos son puntos interiores, es **CERRADO** si contiene a todos sus puntos frontera y un conjunto S es **ACOTADO,** si existe una $R>0$,tal que todas las parejas ordenadas en S están dentro de un círculo de radio R y con centro en el origen.

EXTREMO DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES.
EXTREMOS ABSOLUTOS.

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables, definida en una región acotada y cerrada **R**. Los valores $f(x_0,y_0)$ tales que: $f(x,y)<f(x_0,y_0) \quad \vee \quad f(x,y)>f(x_0,y_0), \quad \forall\ (x,y)$ se llaman el **MÁXIMO** y EL **MÍNIMO** de $f(x,y)$ en la región **R.**

TEOREMA: Sea $f(x,y)$ una función continua de dos variables, definida en una región acotada y cerrada **R**. del plano xy
1.- Existe al menos un punto en **R** donde $f(x,y)$ alcanza un valor mínimo absoluto
2.- Existe al menos un punto en **R** donde $f(x,y)$ alcanza un valor máximo absoluto

EN RESUMEN: Una función $f\left(x,y\right)$ tiene un máximo y un mínimo $f\left(x_0,y_0\right)$ en el punto $p\left(x_0,y_0\right)$, si para todos los puntos $p_i\left(x,y\right)$ diferentes de $p\left(x,y\right)$, de un entorno suficientemente pequeño del punto **P,** se cumple la desigualdad $f\left(x_0,y_0\right)>f\left(x,y\right)$ o $f\left(x_0,y_0\right)<f\left(x,y\right)$, el máximo o mínimo de una función se denomina extremo, en forma similar se termina los extremos para una función de tres variables.

EXTREMOS RELATIVOS.

Una función $f\left(x,y\right)$ de dos variables tiene un **MÁXIMO LOCAL** en (x_0,y_0) sí $f\left(x,y\right)\le f\left(x_0,y_0\right)$ cuando $\left(x,y\right)$ está cerca de $\left(x_0,y_0\right)$ (esto significa que

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

$f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ para todos los puntos (x,y) en algún disco abierto que contiene a (a,b)) El número $f(x_0,y_0)$ se llama **máximo local (relativo).**

Una función $f(x,y)$ de dos variables tiene un **MÍNIMO LOCAL** en (x_0,y_0) Si $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$ cuando (x,y) está cerca de (x_0,y_0) (esto significa que $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$ para todos los puntos (x,y) en algún disco abierto que contiene a (x_0,y_0)). El número $f(x_0,y_0)$ se llama **mínimo local (relativo).**

Nota: Afirmar que $f(x,y)$ tiene un máximo relativo en (x_0,y_0) significa que ningún punto cercano de la gráfica de $z=f(x,y)$ está más alto que el punto (x_0,y_0,z_0)
Análogamente, $f(x,y)$ tiene un mínimo relativo en (x_0,y_0) si ningún punto cercano de la gráfica de $z=f(x,y)$ está más bajo que el punto (x_0,y_0,z_0)

En consecuencia de lo anterior, Para localizar los extremos debemos determinar los puntos críticos de la función, que son por definición aquellos en los que el gradiente de es cero o no está definido. (Al menos una de las dos derivadas $f_x(x_0,y_0)$ o $f_y(x_0,y_0)$ no existe).

CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS.

La condición necesaria para la existencia de extremo, en una función diferenciable $f(x,y)$ es que debe existir, los llamados **PUNTOS CRÍTICOS**.
Los puntos críticos de $f(x,y)$ en un conjunto dado (S), son de tres tipos.

a) **PUNTOS FRONTERA.** Véase definiciones al inicio de esta sección

b) **PUNTOS ESTACIONARIOS.** Decimos que $p_0(x_0,y_0)$ es un punto estacionario si $p_0(x_0,y_0)$ es un punto interior de (S), donde $f(x,y)$ es diferenciable y se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$, En tal punto, el plano tangente es horizontal.

c) **PUNTOS SINGULARES.** Decimos que $p_0(x_0,y_0)$ es un punto singular si $p_0(x_0,y_0)$ es un punto interior de (S), donde $f(x,y)$ no es diferenciable; por ejemplo, un punto donde la gráfica de $f(x,y)$ tiene un pico.

EN RESUMEN: Sea $f(x,y)$ una función definida en una región **R**, que contiene al punto $p_0(x_0,y_0)$. El punto $p_0(x_0,y_0)$ es un punto crítico de $f(x,y)$ si en él ocurre alguna de estas circunstancias:

1) $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0 \ y \ \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$

2) $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \nexists \ o \ \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \nexists$

Nota: los extremos relativos sólo pueden ocurrir en los puntos críticos, esto quiere decir que si $f(x,y)$ tiene en $p_0(x_0,y_0)$ un extremo relativo, entonces $p_0(x_0,y_0)$ es un punto crítico de $f(x,y)$.

EJEMPLO 1. Determine los extremos relativos de $f(x,y)=2x^2+y^2+8x-6y+20$

#1: $f(x, y) := 2\cdot x^2 + y^2 + 8\cdot x - 6\cdot y + 20$

#2: $\dfrac{d}{dx}(2\cdot x^2 + y^2 + 8\cdot x - 6\cdot y + 20)$

#3: $4\cdot x + 8$

#4: SOLVE(4·x + 8, x, Real)

#5: $x = -2$

#7: $\dfrac{d}{dy}(2\cdot x^2 + y^2 + 8\cdot x - 6\cdot y + 20)$

#8: $2\cdot y - 6$

#9: SOLVE(2·y − 6, y, Real)

#10: $y = 3$

Entonces el punto crítico es $(-2,3)$

sustituimos el valor critico encontrado en la función original

#11: 3

ahora sustituimos en la función, cualquier punto que sea diferente al valor crítico, por ejemplo p(1,1) y p(-1,-2)

#12: 25

#13: 30

Podemos notar que se cumple $f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \forall \ (x,y)$ por lo tanto la función **f** tiene un **mínimo relativo** en $(-2,3)$ y el valor de ese mínimo relativo es: $f(-2,3)=3$

EJEMPLO 2. Determine los extremos relativos de $g(x,y)=1+x^2+y^2$ para $0 \leq x^2+y^2 \leq 4$ Analizamos que el dominio de la función es la región del plano x,y que consta de la circunferencia $x^2+y^2=4$ y su interior.

#14: $g(x, y) := 1 + x^2 + y^2$

#15: $\frac{d}{dx}(1 + x^2 + y^2)$

#16: $2 \cdot x$

#17: SOLVE(2·x, x, Real)

#18: $x = 0$

#19: $\frac{d}{dy}(1 + x^2 + y^2)$

#20: $2 \cdot y$

#21: SOLVE(2·y, y, Real)

#22: $y = 0$

El único punto crítico es (0, 0)

Sustituimos el valor crítico en la función.

#23: $g(0, 0) := 1$

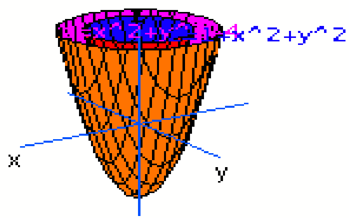
Ahora se sustituye en la función un punto diferente al punto crítico.

#24: $g(-1, -1) := 3$

#25: $g(1, 1) := 3$

Entonces, como $g(x,y) = 1 + x^2 + y^2 > 1 \;\; si(x,y) \neq (0,0)$ la función tiene un mínimo que vale 1 en el punto (0, 0).

#26: $z(x, y) := x^2 + y^2 - 4$

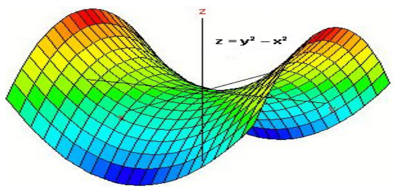


CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES.

Debe tomarse en cuenta que no todos los puntos críticos son valores extremos, algunos de ellos no son ni máximos ni mínimos relativos, sino **PUNTOS DE SILLA.**

PUNTOS SILLA: Los puntos silla son puntos que de acuerdo como se mire la gráfica es máximo y mínimo al mismo tiempo. Un buen ejemplo se da en el paraboloide hiperbólico $z = f(x,y) = y^2 - x^2$ justamente su gráfica es de forma de una silla de montar de ahí viene el nombre de punto silla.

En la función $z = f(x,y) = y^2 - x^2$ el punto silla es el $(0,0,0)$.



EJEMPLO 3. Determine los extremos relativos de la función $w(x, y) = y^2 - x^2$

#27: $W(x,\ y) := y^2 - x^2$

#28: $\frac{d}{dx}(y^2 - x^2)$

#29: $-2\cdot x$

#30: SOLVE(− 2·x, x, Real)

#31: $x = 0$

#32: $\frac{d}{dy}(y^2 - x^2)$

#33: $2\cdot y$

#34: SOLVE(2·y, y, Real)

#35: $y = 0$

Entonces el punto crítico es (0, 0), sustituimos ese punto en la función W.

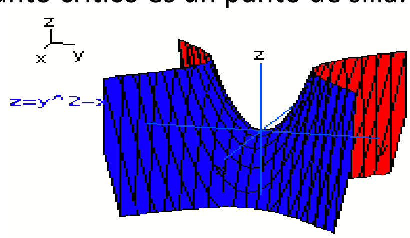
#36: $W(0,\ 0) := 0$

Y ahora sustituimos en la función puntos diferentes al punto crítico.

#37: $W(0,\ 1) := 1$

#38: $W(1,\ 0) := -1$

Pueden notar que la función toma tantos valores negativos (sobre el eje x) como positivos (sobre el eje y), así pues el punto crítico es un punto de silla.



CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMO.

TEOREMA CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES.

Si $p_0(x_0, y_0)$ es un punto estacionario de la función $f(x, y)$ es decir, $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$ con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene al punto $p_0(x_0, y_0)$, entonces para buscar los extremos relativos de $f(x, y)$, se debe calcular la cantidad: $d = g(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\right) - \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}\right]^2$ y luego se aplican los siguientes criterios:

1. Si $d > 0$ y $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$ tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0).

2. Si $d > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0)
3. Si $d < 0$ entonces ((x_0, y_0) , $f(x_0, y_0)$) es un punto silla. (no existe extremo)
4. Si $d = 0$ el criterio no da ninguna conclusión. (queda indeterminada es necesario continuar la investigación).

Es fácil recordar la fórmula para $g(x, y)$ observando que está dada por el determinante de su matriz **HESSIANO.**

$$g(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

Nota: $si\ d > 0$, $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}$ han de tener el mismo signo. Así pues, $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}$ puede ser reemplazada por $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}$ en los dos primeros apartados de este criterio.

PROCEDIMIENTO RECOMENDADO PARA APLICAR EL CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES

Dada la función $f(x, y)$

a) Determine el dominio de $f(x, y)$

b) Se calcula las primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$; y $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}$

c) Buscamos los valores críticos $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$ (por lo general resolver un sistema de ecuaciones)

d) Ahora se calcula todas las derivadas parciales de orden dos.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

e) Se demuestra que la función es continua: $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

f) Se procede a evaluar las segundas derivadas parciales en los puntos críticos obtenidos

g) Se avalúa para cada valor crítico: $g(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\right) - \left[\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}\right]^2$

h) Se aplica los criterios de las segundas derivadas parciales.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

i) Se sustituyen los valores críticos, donde exista extremos (máximo, mínimo) y puto de silla en $f(x,y)$ para obtener su valor.

j) Se grafica $f(x,y)$

Nota: los pasos $f, g\ y\ h$ se pueden hacer simultáneamente

EJEMPLO 4. Sea $R(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$ Determinar los máximos y mínimos locales .

#39: $R(x, y) := x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^3 + 4 \cdot y$

#40: $\frac{d}{dx}(x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^3 + 4 \cdot y)$

#41: $2 \cdot x - 4 \cdot y$

#42: $\frac{d}{dy}(x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^3 + 4 \cdot y)$

#43: $-4 \cdot x + 3 \cdot y^2 + 4$

#44: $\text{SOLVE}\left(\left[0 = 2 \cdot x - 4 \cdot y,\ 0 = -4 \cdot x + 3 \cdot y^2 + 4\right], [x, y]\right)$

#45: $\left[x = 4 \wedge y = 2,\ x = \frac{4}{3} \wedge y = \frac{2}{3}\right]$

Los puntos críticos son: $p_1(4,2);\quad p_2(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$

Ahora se calculan las segundas derivadas:

#46: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^3 + 4 \cdot y)$

#47: 2

#48: $\left(\frac{d}{dy}\right)^2 (x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^3 + 4 \cdot y)$

#49: $6 \cdot y$

#50: $\frac{d}{dy}(2 \cdot x - 4 \cdot y)$

#51: -4

Se aplica la fórmula: $g(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\right) - \left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}\right]^2$

#52: $g(x, y) := 2 \cdot (6 \cdot y) - (-4)^2$

#53: $g(x, y) := 12 \cdot y - 16$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Se sustituye los valores críticos.

#54: $g(4,\ 2) := 8$

#55: $R(4,\ 2) := 0$

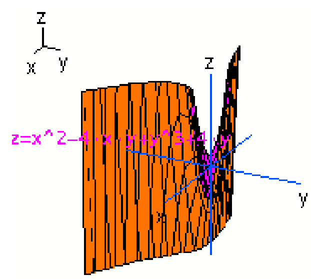
Para este valor crítico se cumple $g(x,y)=8>0 \quad \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}=2>0$

Según el teorema tiene un mínimo local en $R(4,2)=0$

#56: $g\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right) := -8$

#57: $R\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right) := \dfrac{32}{27}$

Para este valor crítico se cumple $g(x,y)=-8<0$ se ve según teorema que no es un valor extremo de f es un punto de silla $f(\frac{4}{3},\frac{2}{3})=\frac{32}{7}$



EJEMPLO 5. Hallar los extremos relativos de $M(x,y)=x^2y^2$

#58: $M(x,\ y) := x^2 \cdot y^2$

#59: $\dfrac{d}{dx}(x^2 \cdot y^2)$

#60: $2 \cdot x \cdot y^2$

#61: $\dfrac{d}{dy}(x^2 \cdot y^2)$

#62: $2 \cdot x^2 \cdot y$

#63: $\mathrm{SOLVE}([0 = 2 \cdot x \cdot y^2,\ 0 = 2 \cdot x^2 \cdot y],\ [x,\ y])$

#64: $[y = 0,\ x = 0]$

Nota: Las dos derivadas parciales son nulas si x = 0 o si y = 0. Así pues, todos los puntos de los ejes x e y son críticos.

Se calculan las segundas derivadas parciales.

#65: $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 (x^2 \cdot y^2)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#66: $2\cdot y$

#67: $\left(\frac{d}{dy}\right)^2 (x^2\cdot y^2)$

#68: $2\cdot x^2$

#69: $\frac{d}{dy}(2\cdot x\cdot y^2)$

#70: $4\cdot x\cdot y$

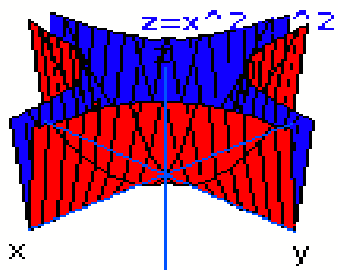
Siempre que x = 0 o y = 0, resulta:

#71: $g(x, y) := (2\cdot y^2)\cdot(2\cdot x^2) - (4\cdot x\cdot y)^2$

#72: $g(x, y) := -12\cdot x^2\cdot y^2$

#73: $g(0, 0) := 0$

Según el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente. Sin embargo puesto que $M(x,y)=0$ en todos los puntos de los ejes x e y, y $M(x,y)=x^2y^2>0$ en todos los demás puntos, podemos concluir que todos esos puntos son mínimos absolutos de la función.



EJEMPLO 6. Hallar los extremos relativos de la función $S(x,y)=sen(xy)$ en la región cerrada determinada por $0\le x\le\pi \;\; y \;\; 0\le y\le 1$

#74: $S(x, y) := SIN(x\cdot y)$

#75: $\frac{d}{dx} SIN(x\cdot y)$

#76: $y\cdot COS(x\cdot y)$

#77: $\frac{d}{dy} SIN(x\cdot y)$

#78: $x\cdot COS(x\cdot y)$

#79: SOLVE([0 = y·COS(x·y), 0 = x·COS(x·y)], [x, y])

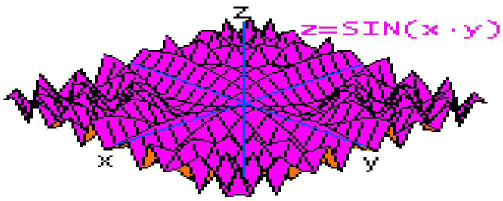
#80: $[COS(x\cdot y) = 0,\ x = 0 \wedge y = 0]$

#81: $S(0, 0) := 0$

El único valor crítico en la región propuesta es (0, 0). Que aplicando los teoremas respectivos da un mínimo absoluto igual a cero, ya que: $0\le xy\le\pi \;\; implica \;\; 0\le senxy\le 1$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Con el fin de detectar otros posibles extremos absolutos, deben de considerar las cuatro porciones de la frontera, formadas por las trazas de los planos verticales $x=0, x=\pi,\ y=\ 0, y=1$ Es de inmediato ver que $sen(xy)$ en todos los puntos que estén en el eje x o en el eje y, y también en el punto $(\pi,1)$ Cada uno de estos puntos es un mínimo absoluto de la superficie.



EJEMPLO 7. Aplique el criterio de la segunda derivada, para determinar extremos y punto de sillas si existen a la función dada. $f\left(x,y\right)=x^3+y^3+3y^2-3x-9y+2$

Una forma directa:

#1: $f(x,\ y) := x^3 + y^3 + 3\cdot y^2 - 3\cdot x - 9\cdot y + 2$

En la barra de expresiones copiamos: **∂(f(x, y),x)=0**

#2: $\frac{d}{dx} f(x,\ y) = 0$

#3: $3\cdot x^2 - 3 = 0$

Y luego **∂(f(x, y),y)=0**

#4: $\frac{d}{dy} f(x,\ y) = 0$

#5: $3\cdot y^2 + 6\cdot y - 9 = 0$

Se buscan los valores críticos, solucionando el sistema de ecuaciones:

#6: $\text{SOLVE}\left(\left[3\cdot x^2 - 3 = 0,\ 3\cdot y^2 + 6\cdot y - 9 = 0\right],\ [x,\ y]\right)$

#7: $[x = 1 \wedge y = 1,\ x = 1 \wedge y = -3,\ x = -1 \wedge y = 1,\ x = -1 \wedge y = -3]$

Ahora aplicamos la ecuación: **g(x, y) ≔ ∂(f(x, y), x, 2)·∂(f(x, y), y, 2) - ∂(∂(f(x, y), x), y)^2**

#8: $g(x,\ y) := \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x,\ y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}\right)^2 f(x,\ y) - \left(\frac{d}{dy}\ \frac{d}{dx} f(x,\ y)\right)^2$

#9: $g(x,\ y) := 36\cdot x\cdot(y + 1)$

Se sustutuyen todos los valores criticos en la expresión #8 y se aplica el criterio

a) Para $p(1,1)$

#10: $g(1,\ 1)$

#11: 72

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#12: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ f(x, y)

#13: $6\cdot x$

#14: 6

Tiene un mínimo relativo en (1, 1). Para saber el valor de ese mínimo se sustituye ese valor crítico en la función original

#15: f(1, 1)

#16: −5

b) Para $p(1,-3)$

#17: g(1, −3)

#18: −72

#19: 6

#20: f(1, −3)

#21: 27

Existe un punto de silla en el punto $p(1,-3)$ y vale 27

c) Para $p(-1,1)$

#22: g(−1, 1)

#23: −72

#24: −6

#25: f(−1, 1)

#26: −1

Existe un punto de silla en el punto $p(-1,1)$ y vale -1

d) Para $p(-1,-3)$

#27: g(−1, −3)

#28: 72

#29: −6

#30: f(−1, −3)

#31: 31

Existe máximo relativo en $p(-1,-3)$ y vale 31

RECOMENDACIÓN. Cuando se desea obtener los extremos absolutos de una función en una cierta región del dominio, se deben seguir los siguientes pasos:

a) Hallar los puntos críticos de la función en el dominio y calcular su valor en ellos.

b) Hallar los valores extremos de la función sobre la frontera del dominio.

c) Determinar los valores máximo y mínimo de entre todos los hallados en los dos puntos anteriores.