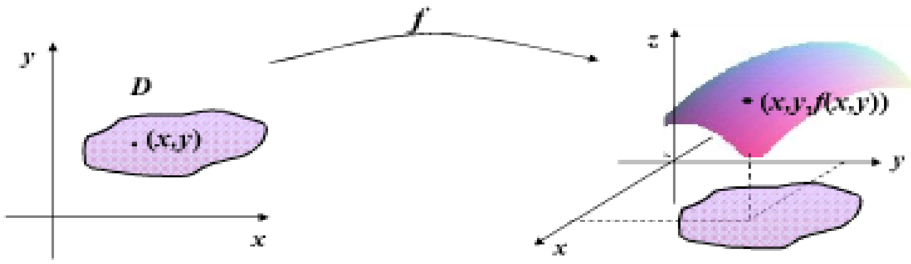
FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $D \subset R^2$ Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) en $Df(x, y)$ un único número real z denotado por $z = f(x, y)$ D es el dominio de f.

$z = f(x, y)$ La definimos como una función $f: D \subset R^2 \to R$ de conjuntos de puntos donde $\{(p, z)/z = f(x, y), P \in R^2 \wedge z \in R\}$

Gráficamente



DOMINIO Y RANGO

El conjunto de parejas ordenadas para las cuales la regla de correspondencia da un número real se llama dominio de la función. El conjunto de valores *z* que corresponden a los pares ordenados se llama imagen o rango.

Función de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ y $\{(p, z)/z = f(x, y), P \in R^2 \wedge z \in R\}$

$$Df = \{(x, y) \in R^2 / \exists f(x, y) \wedge z \in R\}$$

$$Rf = \{z \in R / z = f(x, y) \wedge (x, y) \in R^2\}$$

EJEMPLO 1 Sea la función $z = f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ Determine: a) dominio de la función,

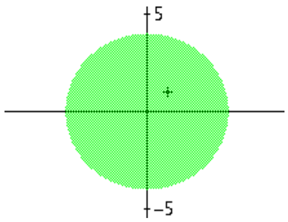
a) Claramente el dominio es $Df = \{(x, y)/x^2 + y^2 \le 16\}$, es decir, un disco cerrado con centro en el origen y radio 4.

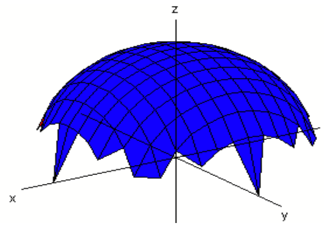
En Derive: (Es necesario el conocimiento teórico anteriormente descrito)

#1: $f(x, y) := \sqrt{(16 - x^2 - y^2)}$

#2: $16 - x^2 - y^2 \ge 0$

#3: $x^2 + y^2 \le 16$



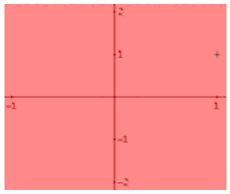
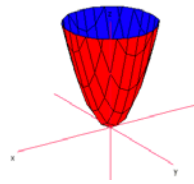


Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 2. Hallar el dominio de la función $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

Como es una función polinómica el $Df(x,y)$ es todo el plano xy

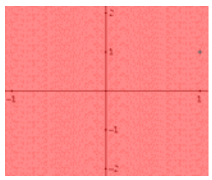
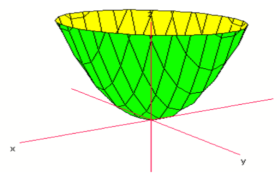
#4: $f(x, y) := x^2 + y^2$

EJEMPLO 3. Sea la función definida por $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ Hallar el dominio

El $Df(x,y)$ está definido por todo el plano xy

#6: $f(x, y) := x^2 + x\cdot y + y^2$

EJEMPLO 4. Determine el dominio de la función, $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{y}$

$y \neq 0 \wedge 25 - x^2 - y^2 \geq 0$

$$Df = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, f(x,y) = \frac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{y} \wedge y \neq 0 \wedge 25 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge f(x,y) \in R \right\}$$

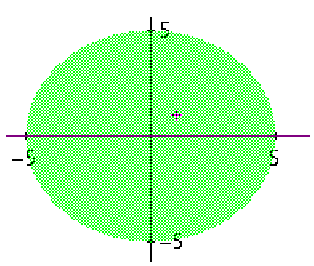
#7: $f(x, y) := \dfrac{\sqrt{(25 - x^2 - y^2)}}{y}$

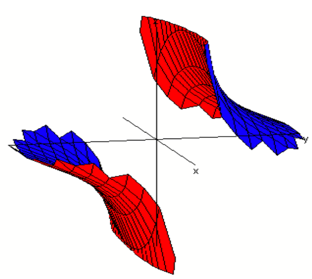
#8: $25 - x^2 - y^2 \geq 0$

#9: $y \neq 0$

Para graficar:

#10: $[25 - x^2 - y^2 \geq 0,\ y = 0]$



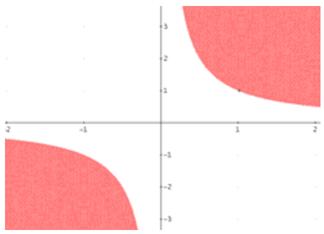
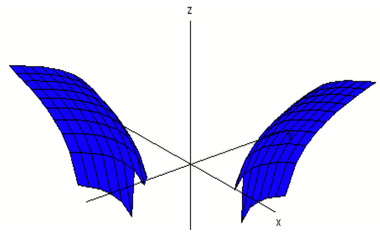


Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 5. Determine el dominio de la función $f(x,y)=\ln(xy-1)$

El dominio de f es $\{(x,y)|xy>1\}$, el conjunto de todos los puntos (x,y) en R^2 el interior de la hipérbola $xy=1$.

#11: $f(x, y) := \mathrm{LN}(x \cdot y - 1)$ #12: $x \cdot y - 1 \geq 0$

LÍMITES Y CONTINUIDAD.

En funciones de varias variables el concepto de límite es mucho más complejo que en funciones de una variable debido a que a un punto nos podemos aproximar por muchas direcciones diferentes. Veamos algunos ejemplos que nos permiten estudiar la continuidad de la función a través de la información que nos da su límite.

EJEMPLO 6. Determinar la existencia del límite de la siguiente función: $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\ en\ (0,0)$

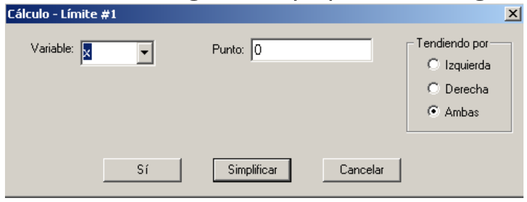
Podemos demostrar la existencia del límite por dos procedimientos:

PRIMER PROCEDIMIENTO:

a) Tecleamos la función dada:

$$\#1:\quad f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

b) Activamos el comando CALCULO, luego LIM, y aparece la siguiente figura:



Seleccione, **variable x, punto 0, tendiendo por: ambas,** y pulse simplificar:

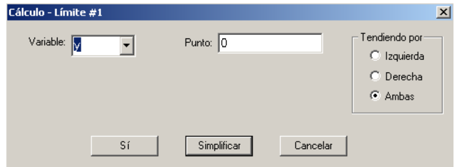
$$\#2:\quad \lim_{x\to 0} f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\#3:\quad f(0, y) := -1$$

Este resultado nos indica el valor del límite reiterado cuando **y** es constante. $l_{xy}=-1$

Repetimos la secuencia anterior, pero teniendo en cuenta que ahora x es constante.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas



#4: $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) := \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

#5: $f(x, 0) := 1$

Este resultado nos indica el valor del límite reiterado cuando **y** es constante. $l_{yx} = 1$

Como los resultados de los límites iterados son diferentes, concluimos que la función no tiene límite en el punto (0, 0).

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

a) Tecleamos en la barra de expresiones: $\lim((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), [x, y], [0, 0])$ y aplicamos ≅ (introducir y simplificar)

#6: $\lim\limits_{[x,\ y]\to[0,\ 0]} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

#7: -1

b) Tecleamos en la barra de expresiones: $\lim((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), [y, x], [0, 0])$

#8: $\lim\limits_{[y,\ x]\to[0,\ 0]} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

#9: 1

Concluimos que la función no tiene límite en el punto (0, 0).

REGLA DE LAS DOS TRAYECTORIAS

Si dos trayectorias que llevan a un punto $p(a, b)$ producen dos valores límites diferentes para f, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ no existe.

Nota: pueden escogerse otras trayectorias que lleguen al origen. Por ejemplo, si $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = 2x$ entonces:

#10: $\lim\limits_{[x,\ y]\to[0,\ 0]} \dfrac{x^2 - 4\cdot x^2}{x^2 + 4\cdot x^2}$

#11: $-\dfrac{3}{5}$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#12: $\lim_{[y,\ x]\to[0,\ 0]} \frac{x^2 - 4\cdot x^2}{x^2 + 4\cdot x^2}$

#13: $-\frac{3}{5}$

Observe que se puede opinar libremente que el límite existe, pero se debe utilizar otros caminos para demostrarlo, se puede seleccionar otro camino que pase por el punto indicado.

EJEMPLO 7. Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ no existe.

#14: $\lim_{[x,\ y]\to[0,\ 0]} \frac{x^2\cdot y}{x^4 + y^2}$

#15: 0

#16: $\lim_{[y,\ x]\to[0,\ 0]} \frac{x^2\cdot y}{x^4 + y^2}$

#17: 0

Aparentemente existe el límite, entonces hay que tomar una trayectoria diferente que pase por (0, 0) por ejemplo $y = x^2$

#18: $\lim_{[x,\ y]\to[0,\ 0]} \frac{x^4}{x^4 + x^4}$

#19: $\frac{1}{2}$

Por lo tanto, no todas las trayectorias que pasan por (0, 0) llevan al mismo límite y entonces, el límite no existe.

CONTINUIDAD

Definición: Se dice que la función f de dos variables ***x*** y **y** es continua en el punto (x_0, y_0) si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

$i)\ f(x_0, y_0)\ existe$

$ii)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ existe$

$iii)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 8. Determinar si $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ es continua en (0,0) la función.

#20: $\lim\limits_{[x,\ y]\to[0,\ 0]} \dfrac{x + y}{x - y}$

#21: -1

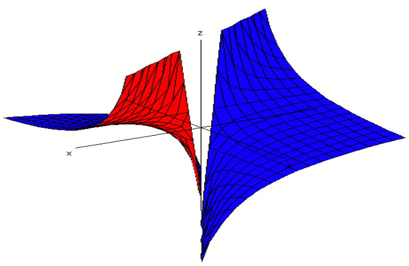
#22: $\lim\limits_{[y,\ x]\to[0,\ 0]} \dfrac{x + y}{x - y}$

#23: 1

Como no coinciden los límites reiterados entonces podemos asegurar que no existe el límite en (0,0) y por tanto la función no es continua en (0,0).

Veamos la gráfica de dicha función.

#24: $f(x,\ y) := \dfrac{x + y}{x - y}$



EJEMPLO 9. Estudiar la continuidad de: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

#25: $\lim\limits_{[x,\ y]\to[0,\ 0]} \dfrac{x^2\cdot y}{x^2 + y^2}$

#26: 0

#27: $\lim\limits_{[y,\ x]\to[0,\ 0]} \dfrac{x^2\cdot y}{x^2 + y^2}$

#28: 0

Si tomamos otros caminos diferentes que pase por el punto (0, 0) $y = x; y = x^2$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#29: $\lim_{[x,\ y]\to[0,\ 0]} \dfrac{x^3}{x^2 + x^2}$

#30: 0

#31: $\lim_{[x,\ y]\to[0,\ 0]} \dfrac{x^4}{x^2 + x^4}$

#32: 0

Buscamos el valor de la función para cada uno de los valores dados $x=0, y=0$, comando simplificar, luego sustituir y colocamos el valor asignado y simplificar

Sustituimos en la función cuando $x=0$

#33: $\dfrac{0^2 \cdot y}{0^2 + y^2}$

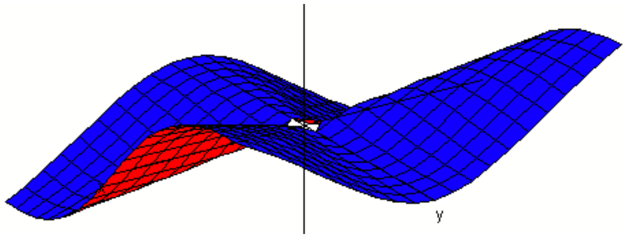
#34: 0

Sustituimos en la función cuando $y=0$

#35: $\dfrac{x^2 \cdot 0}{x^2 + 0^2}$

#36: 0

De donde se sigue que la función dada es continua en el origen, ya que: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ Y por último graficamos.



LÍMITES EN COORDENADAS POLARES

Las coordenadas polares permiten identificar un punto de coordenadas (*x, y*) del plano mediante otro par de números (r,θ), definidos mediante estas relaciones: $x = r\cos(\theta);\ y = rsen(\theta)$ (Dados en clases)

La geometría de las coordenadas polares *r* representa la distancia del punto (*x, y*) al origen. Por esa razón, si *r* tiende a 0 el punto de coordenadas (r,θ) se aproxima al origen. Esa es la idea que nos lleva a proponer el siguiente método para analizar un límite en el origen.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Para estudiar la existencia del límite $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y)$ efectuamos el cambio a coordenadas polares y obtenemos una nueva función $F(r,\theta)=f(r\cos\theta, rsen\theta)$. A continuación analizamos el límite: $\lim\limits_{r\to 0} F(r,\theta)=\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, rsen\theta)$

Lo interesante de esta idea es que de nuevo nos permite analizar el límite de dos variables mediante un límite en una sola variable.

Nota: Si el límite $\lim\limits_{r\to 0} F(r,\theta)=\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, rsen\theta)$ no existe o depende de θ, podemos asegurar que f no tiene límite en (0,0).

TEOREMA: Supongamos que se puede descomponer la función $F(r,\theta)$ de esta forma: $F(r,\theta)=h(r)G(\theta)$ Donde además $\lim\limits_{r\to 0} h(r)=0$ Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ sí y sólo si la función $G(\theta)$ está acotada en $[0,2\pi]$

EJEMPLO 10. Determine si la función dada es continua $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

```
                2
               x ·y
#1:   f(x, y) := ───────
                2    2
               x  + y

                           2
                          x ·y
#2:            lim        ───────
        [x, y]→[0, 0]      2    2
                          x  + y
```

Efectuamos el cambio a coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta)=\begin{cases} \lim\limits_{r\to 0} r\cos^2(\theta)\mathrm{sen}(\theta); & si\,\theta\neq 0,\pi \\ \lim\limits_{r\to 0} 0 & si\,\theta=0,\pi \end{cases}$$

```
                                       2
#3:                    r·SIN(θ)·COS(θ)

                                2
#4:   lim r·SIN(θ)·COS(θ)
      r→0

#5:                                 0

      lim 0
#6:   r→0

#7:                                 0
```

Es continua en el origen ya que: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas