DERIVACIÓN DE FUNCIONES CON VARIAS VARIABLES.

DERIVADAS PARCIALES.

El programa DERIVE, permite el cálculo simbólico de derivadas parciales de funciones de dos o más variables de modo análogo a como hemos realizado con funciones de una variable, así con el icono correspondiente de la barra de herramienta , o con la secuencia Cálculo, Derivada, indicamos al programa cuya derivada queremos hallar, la variable respecto de la cual se quiere derivar y el orden de la derivada que se desea.

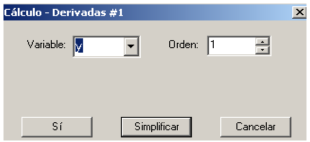
EJEMPLO 1: Dada las funciones $f(x,y)=2xy-x^2$; $g(x,y)=x+y^2$ Determine $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial x}$

a) Introducimos la expresión $f(x,y)=2xy-x^2$; $g(x)=x+y^2$

#1: $2\cdot x\cdot y-x^2$

Nota: Observe que en algunos casos, no es necesario colocar $f(x,y):=2xy-x^2$, ya que al derivar automáticamente el programa aplica la definición de la derivada.

b) Aplicar la secuencia: Cálculo, Derivadas, seleccione la variable: y; Orden: 1 y luego simplificar



#2: $\frac{d}{dy}(2\cdot x\cdot y-x^2)$

#3: $2\cdot x$

#4: $x+y^2$

#5: $\frac{d}{dx}(x+y^2)$

#6: 1

EJEMPLO 2: Hallar las derivadas parciales de $z=f(x,y)=xe^{x^2y}$ y luego evaluarlas en el punto $(1,Ln2)$

#1: $f(x,y):=x\cdot e^{x^2\cdot y}$

#2: $\frac{d}{dx}\left(x\cdot e^{x^2\cdot y}\right)$

#3: $e^{x^2\cdot y}\cdot(2\cdot x^2\cdot y+1)$

#4: $\frac{d}{dy}\left(x\cdot e^{x^2\cdot y}\right)$

#5: $x^3\cdot e^{x^2\cdot y}$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Para evaluar las derivadas parciales en el punto dado:
Seleccionar la derivada parcial a evaluar luego, simplificar, sustituir variable, se le colocan los valores respectivos y por último simplificar.

#6: $4\cdot LN(2) + 2$

#7: 2

Una forma directa de calcular la derivada parcial de una función con respecto a una determinada variable es tipiando en la barra de edición de expresiones:
DIF((f(x,y)),x) y simplificar (Para la derivada parcial con respecto a la variable x)
DIF((f(x,y)),y) y simplificar(Para la derivada parcial con respecto a la variable y)

EJEMPLO 3. Hallar las derivadas parciales de $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

#8: $r(x, y, z) := \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

dif(√(x^2 + y^2 + z^2), x)

#9: $\frac{d}{dx}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

#10: $\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$

dif(√(x^2 + y^2 + z^2), y)

#11: $\frac{d}{dy}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

#12: $\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$

dif(√(x^2 + y^2 + z^2), z)

#13: $\frac{d}{dz}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

#14: $\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$

Pero también, puede utilizar el simbolo de derivada parcial de la barra de herramientas matemáticas.

∂(√(x^2 + y^2 + z^2), z)

#15: $\frac{d}{dz}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

#16: $\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$

EJEMPLO 4. Demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$, si $z(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

#19: $z(x, y) := LN(x^2 + y^2)$

Se escribe directamente en la barra de expresiones:
x(∂(LN(x^2 + y^2),x))+y(∂(LN(x^2 + y^2),y)) y luego al icono de introducir y simplificar

#20: $x\cdot\frac{d}{dx} LN(x^2 + y^2) + y\cdot\frac{d}{dy} LN(x^2 + y^2)$

#21: 2

APLICACIONES:

EJEMPLO 5: En el análisis de algunos circuitos eléctricos se utiliza la fórmula $I=\frac{v}{\sqrt{R^2+L^2w^2}}$, donde: I es la intensidad de corriente, V es la tensión o voltaje, R la resistencia, L la inductancia y w una constante positiva. Calcule: La velocidad de la intensidad con respecto a la resistencia y La velocidad de la intensidad con respecto a la inductancia.

#1: $I := \frac{v}{\sqrt{(r^2 + l^2\cdot w^2)}}$

#2: $\frac{d}{dr}\frac{v}{\sqrt{(r^2 + l^2\cdot w^2)}}$

#3: $-\frac{r\cdot v}{(l^2\cdot w^2 + r^2)^{3/2}}$

#4: $\frac{d}{dl}\frac{v}{\sqrt{(r^2 + l^2\cdot w^2)}}$

#5: $-\frac{l\cdot v\cdot w^2}{(l^2\cdot w^2 + r^2)^{3/2}}$

EJEMPLO 6: En la ingeniería de carreteras, al estudiar la penetración del congelamiento en los caminos, la temperatura T al tiempo t en horas y a una profundidad de x metros está dada aproximadamente: $T=T_0e^{-\lambda x}sen(wt-\lambda x)$ Donde T_0, w y λ, son constantes. El periodo de $sen(wt-\lambda x)$ es de 24 horas. Calcule e interprete $\frac{\partial T}{\partial t}$; $\frac{\partial T}{\partial x}$

Asignamos letras diferentes a las variables: $T=Z;\ T_0=a$ para que el programa las pueda reconocer como constantes.

#1: $Z := a\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot SIN(w\cdot t - \lambda\cdot x)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

$$\#2: \quad \frac{d}{dt}\left(a \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot SIN(w \cdot t - \lambda \cdot x)\right)$$

$$\#3: \quad a \cdot w \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot COS(\lambda \cdot x - t \cdot w)$$

El resultado es la tasa de variación de la temperatura con respecto al tiempo a una profundidad fija x.

$$\#5: \quad \frac{d}{dx}\left(a \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot SIN(w \cdot t - \lambda \cdot x)\right)$$

$$\#6: \quad a \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot SIN(\lambda \cdot x - t \cdot w) - a \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot COS(\lambda \cdot x - t \cdot w)$$

El resultado es la tasa de variación de la temperatura con respecto al tiempo a una profundidad en un tiempo fijo.

EJEMPLO 7: La intensidad de la iluminación solar (en luxes) al tiempo t en un día claro y a una profundidad x en el océano está dada aproximadamente por $I(x,t) = I_0 e^{-kx} sen^3\left(\frac{\pi t}{D}\right)$

Donde I_0 es la intensidad del día (en horas) y $k > 0$. Suponiendo que $I_0 = 1000, D = 12 \ \ y \ k = 0.10$ Calcule las velocidades de iluminación solar: $\frac{\partial I}{\partial t}; \ \frac{\partial I}{\partial x}$

Asignamos letras diferentes a la variable: $I_0 = a$ para que el programa las pueda reconocer como constantes.

$$\#1: \quad I(x,\ t) := a \cdot e^{-k \cdot x} \cdot SIN\left(\frac{\pi \cdot t}{d}\right)^3$$

$$\#2: \quad \frac{d}{dt}\left(a \cdot e^{-k \cdot x} \cdot SIN\left(\frac{\pi \cdot t}{d}\right)^3\right)$$

$$\#3: \quad \frac{3 \cdot a \cdot \pi \cdot e^{-k \cdot x} \cdot SIN\left(\frac{t \cdot \pi}{d}\right)^2 \cdot COS\left(\frac{t \cdot \pi}{d}\right)}{d}$$

$$\#4: \quad e^{-x/10} \cdot COS\left(\frac{t \cdot \pi}{12}\right) \cdot \left(125 \cdot \pi - 125 \cdot \pi \cdot COS\left(\frac{t \cdot \pi}{6}\right)\right)$$

$$\#5: \quad \frac{d}{dx}\left(a \cdot e^{-k \cdot x} \cdot SIN\left(\frac{\pi \cdot t}{d}\right)^3\right)$$

$$\#6: \quad - a \cdot k \cdot e^{-k \cdot x} \cdot SIN\left(\frac{t \cdot \pi}{d}\right)^3$$

$$\#7: \quad - 100 \cdot e^{-x/10} \cdot SIN\left(\frac{t \cdot \pi}{12}\right)^3$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

DIFERENCIAL TOTAL Y CÁLCULO APROXIMADO.

DIFERENCIABILIDAD

En una variable se dice que una función $f(x)$ es derivable. En cambio en 2 o más variables se habla de una función $z = f(x, y)$ **es diferenciable.**

DEFINICIÓN. Si $f(x, y)$ tiene derivadas parciales contínúas $f_x(x, y); f_y(x, y)$ en un disco D, cuyo interior contiene a (a, b), entonces $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b).

Si f es diferenciable en todo punto perteneciente a una región R entonces se dice que la función es $f(x, y)$ es diferenciable en una región R.

CONDICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD.

Una función $f : D \to R$ donde $D \subseteq R$ con derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en una región, entonces la función es diferenciable en dicha región.

INCREMENTO TOTAL DE UNA FUNCIÓN.

Se llama *incremento total* de una función $z = f(x, y)$ en un punto $p(x, y)$ a la diferencia $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ donde Δx y Δy son incrementos arbitrarios de los argumentos.

DIFERENCIAL TOTAL DE UNA FUNCIÓN.

Dada la función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes **x** e **y**, donde, Los diferenciales de las variables se definen como $dx = \Delta x;\ dy = \Delta y$, entonces la **diferencial parcial de z** con respecto a **x** se define como $d_x z = f_x(x, y)dx = \frac{\partial z}{\partial x}dx$, y **la diferencial parcial de z** con respecto a **y** se define como $d_y z = f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial y}dy$ por lo tanto, la diferencial total de la función dz se define como la suma de las diferenciales parciales. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

Para una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ La diferencial total dw se define como la suma de las diferenciales parciales. $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$ (Si la función no es diferenciable esta expresión no tiene ningún significado).

EJEMPLO 8. Calcular el diferencial total de $w(x, y) = sen^2(x) + \cos^2(y)$
Se introduce la expresión:

$$\#22: \quad w(x, y) := \text{SIN}(x)^2 + \text{COS}(y)^2$$

Para colocar la fórmula se procede: OPCIONES, AJUSTES DE MODO y en el recuadro, seleccionar INTRODUCCIÓN, MODO seleccionar PALABRAS.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Luego se escribe: **dw= ∂(SIN(x)^2 + COS(y)^2, x)·dx + ∂(SIN(x)^2 + COS(y)^2, y)·dy**

#23: InputMode := Word

#24: $dw = \left(\frac{d}{dx}\left(SIN(x)^2 + COS(y)^2\right)\right)\cdot dx + \left(\frac{d}{dy}\left(SIN(x)^2 + COS(y)^2\right)\right)\cdot dy$

#25: $dw = 2\cdot dx\cdot SIN(x)\cdot COS(x) - 2\cdot dy\cdot SIN(y)\cdot COS(y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,sen\,x\cos x;\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2\cos y\,sen\,y$$

$$dz = 2\,sen\,x\cos x dx - 2\cos y\,sen\,y\,dy \Rightarrow dz = sen\left(2x\right)dx - sen\left(2y\right)dy$$

APLICACIONES:

EJEMPLO 9: El radio y la altura de un cilindro circular recto miden 3 y 8 pulgadas, respectivamente, con un error posible en la medición de ± 0.05 pulgadas. Usar diferenciales para estimar el error máximo que se comete al calcular el volumen del cilindro.

a) la fórmula general para el volumen V de un cilindro de radio r y altura h es: $V(r,h) = \pi r^2 h$ y consideremos a r y h los valores medidos con errores máximos $dr\ \ y\ \ dh$ respectivamente en la medición.

b) El error en el cálculo del volumen es el cambio en V correspondiente a $dr\ \ y\ \ dh$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)dh$$

c) Se introduce la siguiente expresión: **dv = ∂(pir^2h,r)·dr + ∂(pir^2h, h)·dh**

#1: $v(r,\ h) := \pi\cdot r^2\cdot h$

#2: InputMode := Word

#3: $dv = \left(\frac{d}{dr}\left(\pi\cdot r^2\cdot h\right)\right)\cdot dr + \left(\frac{d}{dh}\left(\pi\cdot r^2\cdot h\right)\right)\cdot dh$

#4: $dv = \pi\cdot dh\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot dr\cdot h\cdot r$

d) Y ahora se sustituyen los valores dados y se simplifica nuevamente:

#5: $dv = \frac{57\cdot\pi}{20}$

#6: $dv = 8.953539062$

Nota: Esta es una aproximación al error máximo, debe tomar en cuenta los valores ± 0.05

EJEMPLO 10: Los lados (en cm) de un paralelepípedo rectangular cambian de 9, 6, y 4 a 9.02, 5.97, y 4.01, respectivamente. Use diferenciales para calcular aproximadamente el cambio del volumen.

a) la fórmula general para el volumen V: $V(x,y,z) = xyz$ y consideremos $dx\ dy\ y\ dz$ los valores errores en la medición.

b) El error en el cálculo del volumen es el cambio en V correspondiente a $dx,\ dy\ y\ dz$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)dz$$

c) Se introduce la siguiente expresión: **dv = ∂(x·y·z, x)·dx + ∂(x·y·z, y)·dy + ∂(x·y·z, z)·dz**

#1: $v(x, y, z) := x\cdot y\cdot z$

#2: InputMode := Word

#3: $dv = \left(\frac{d}{dx}(x\cdot y\cdot z)\right)\cdot dx + \left(\frac{d}{dy}(x\cdot y\cdot z)\right)\cdot dy + \left(\frac{d}{dz}(x\cdot y\cdot z)\right)\cdot dz$

#4: $dv = x\cdot(dz\cdot y + dy\cdot z) + dx\cdot y\cdot z$

Ahora se calculan los valores errores en la medición: $dx = \Delta x \Rightarrow dx = x - x_0;\ dy = \Delta y \Rightarrow y - y_0$

#5: $dx = 9.02 - 9$

#6: $dx = 0.02$

#7: $dy = 5.97 - 6$

#8: $dy = -0.03$

#9: $dz = 4.01 - 4$

#10: $dz = 0.01$

Se sustituyen los valores dados y se simplifica nuevamente:

#11: $dv = -\frac{3}{50}$

#12: $dv = -0.06$

Por lo tanto, el volumen cambia aproximadamente en ese valor (disminuye)

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas