DERIVADAS PARCIALES

DEFINICIÓN:

Si $z = f(x,y)$ las derivadas parciales de f respecto de "x" y de "y" son las funciones f_x, f_y definidas de la siguiente manera:

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}; \quad f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$ Siempre que el límite exista.

EJEMPLO 1. Demostrar que la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & si \quad x^2+y^2=0 \\ 0 & si \quad x=y=0 \end{cases}$ tiene derivadas parciales $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ en el punto $(0,0)$ a pesar de ser discontinua en este punto.

Calculando las derivadas parciales en el punto $(0,0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

ahora veremos la discontinuidad, para esto tomamos dos caminos que pasen por $(0,0)$, tales como $y = x, y = 4x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \qquad (1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{17x^2} = \frac{8}{17} \qquad (2)$$

como $(1) \neq (2)$ entonces $\nexists \lim\limits_{(x,y)\neq(0,0)} f(x,y)$ por lo tanto $f(x,y)$ es discontinua en $(0,0)$

Las derivadas parciales de f respecto de "x" y de "y" , significa que dado $z = f(x,y)$ para calcular f_x debemos considerar a "y" constante; y para calcular f_y debemos considerar a "x" constante.

NOTACIÓN. Hay distintas formas de notar las derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$

DERIVADA PARCIAL DE F CON RESPECTO A X $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y) = f_x(x,y)$

DERIVADA PARCIAL DE F CON RESPECTO A Y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y) = f_y(x,y)$

Las derivadas parciales evaluadas en un punto (a, b) se denotan como:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = f'_x(a,b) = f_x(a,b); \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = f'_y(a,b) = f_y(a,b)$$

EJEMPLO 2. Hallar las derivadas parciales de $z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

Considerando "y" constante y derivando con respecto a "x" entonces $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$

Considerando "x" constante y derivando con respecto a "y" entonces $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

EJEMPLO 3. Hallar las derivadas parciales de $z = f(x,y) = xe^{x^2 y}$ y luego evaluarlas en el punto $(1, Ln2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y} + 2x^2 y e^{x^2 y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y}(1 + 2x^2 y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 e^{x^2 y}$$

Evaluar las derivadas parciales en el punto dado

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\ln 2)} = e^{\ln 2}(1 + 2\ln 2) = 2 + 4\ln 2; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\ln 2)} = e^{\ln 2} = 2$$

EJEMPLO 4. Sea $f(x,y) = z = \frac{x-y}{x+y}$. Determine las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x-y) - (x-y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x-y) - (x-y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)(-1)-(x-y)}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

EJEMPLO 5. Sea $f(x,y) = z = \ln\left(sen\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)\right)$. Determine las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}{sen\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) ctg\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)}{sen\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)}\left(-\frac{x+a}{2y^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{x+a}{2y^{\frac{3}{2}}} ctg\left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)$$

EJEMPLO 6. Hallar $f_x(1,2,0)$, $f_y(1,2,0)$ y $f_z(1,2,0)$ sí $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$.

$$f(x,y,z) = \ln(xy+z)$$

$$f_x(x,y,z) = \frac{y}{xy+z} \Rightarrow f_x(1,2,0) = \frac{2}{2+0} = 1$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{x}{xy+z} \Rightarrow f_y(1,2,0) = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{1}{xy+z} \Rightarrow f_z(1,2,0) = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 7. Hallar $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{1}{r}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x=\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

EJEMPLO 8. Calcular $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$, si $x=r\cos\theta$ y $y=r\,sen\,\theta$

$$x=r\cos\theta \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta;\ \ \frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\,sen\,\theta$$

$$y=r\,sen\,\theta \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial r}=sen\,\theta;\ \ \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,sen\,\theta \\ sen\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\,sen^2\theta=r$$

EJEMPLO 9. Demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$, si $z=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$$z=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+y}{x^2+yx+y^2};\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+x}{x^2+yx+y^2}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2+xy}{x^2+xy+y^2}+\frac{2y^2+xy}{x^2+xy+y^2}=\frac{2\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^2+xy+y^2}=2$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

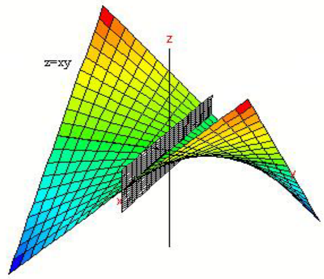
EJEMPLO 10. El área de un trapecio de bases a, b y de altura h es igual a $S=\frac{a+b}{2}h$, Determine $\frac{\partial S}{\partial a},\frac{\partial S}{\partial b},\frac{\partial S}{\partial h}$

$$S=\frac{a+b}{2}h \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial a}=\frac{h}{2};\quad \frac{\partial S}{\partial b}=\frac{h}{2};\ \ \frac{\partial S}{\partial h}=\frac{a+b}{2}$$

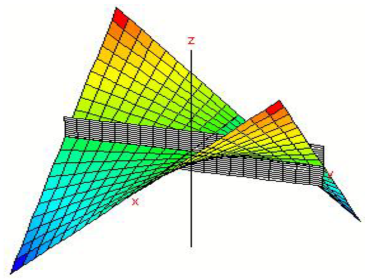
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Las derivadas parciales $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ son las pendientes de la superficie en las direcciones x e y.

La derivada $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva, producto de la intersección del plano $y = y_0$ con la superficie de la gráfica de la función.



La derivada $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva, producto de la intersección del plano x = x_0 con la superficie de la gráfica de la función.



DIFERENCIABILIDAD

En una variable se dice de que una función f(x) es derivable. En cambio en 2 o más variables se habla de una función **diferenciable.**

DEFINICIÓN. Si $f(x,y)$ tiene derivadas parciales continúas $f_x(x,y); f_y(x,y)$ en un disco D, cuyo interior contiene a (a, b), entonces $f(x,y)$ es diferenciable en (a, b).

Si f es diferenciable en todo punto perteneciente a una región R entonces se dice que la función es $f(x,y)$ es diferenciable en una región R.

CONDICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD.

Una función $f: D \to R$ donde $D \subseteq R$ con derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en una región, entonces la función es diferenciable en dicha región.

INCREMENTO TOTAL DE UNA FUNCIÓN.

Si $z = f(x,y)$ es una función de x e y entonces el incremento total de una función se define por: $\Delta z = \Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

DIFERENCIAL TOTAL DE UNA FUNCIÓN.

Dada la función $z = f(x,y)$ de dos variables independientes **x** e **y**, donde, Los diferenciales de las variables se definen como $dx = \Delta x;\ dy = \Delta y$ entonces a la diferencial total de la función dz se define como la suma de las diferenciales parciales. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

Para una función de tres variables $w = f(x,y,z)$ La diferencial total dw se define como la suma de las diferenciales parciales. $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$

EJEMPLO 11. Calcular el diferencial total de $z = x^2 + 3y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3 \Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 2xdx + 3dy$$

EJEMPLO 12. Calcular el diferencial total de $z = sen^2 x + \cos^2 y$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,sen\,x\cos x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2\cos y\,sen\,y$$

$$dz = 2\,sen\,x\cos x dx - 2\cos y\,sen\,y\,dy \Rightarrow dz = sen(2x)\,dx - sen(2y)\,dy$$

EJEMPLO 13. Calcular el diferencial total de $z = arctg\,\frac{y}{x} + arctg\,\frac{x}{y}$

$$dx = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$z = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + arctg\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$dz = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

EJEMPLO 14. Calcular el diferencial total de $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$du = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

APLICACIÓN DE LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN A LOS CÁLCULOS APROXIMADOS.

Si $z = f(x, y)$ se verifica la igualdad aproximada: $\Delta z \cong dz$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \cong \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

EJEMPLO 15. Use la diferencial total dz para aproximar el cambio en $z = 2x^2y^3$ cuando (x, y) se mueve de los dos puntos $P(1,1)\ a\ Q(0.99, 1.02)$

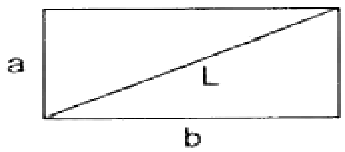
$$z = f(x, y) = 2x^2y^3 \Rightarrow dz = (4xy^3)dx + (6x^2y^2)dy$$

$$\Delta x = x_1 - x \Rightarrow x_1 = \Delta x + x; \ \Delta y = y_1 - y \Rightarrow y_1 = \Delta y + y$$

$$Donde: x = 1; \ y = 1; \ x_1 = 0.99; \ y_1 = 1.02$$

$$z = f(x,y) = 2x^2y^3 \Rightarrow dz = (4xy^3)dx + (6x^2y^2)dy$$
$$\Delta x = x_1 - x \Rightarrow x_1 = \Delta x + x;\ \Delta y = y_1 - y \Rightarrow y_1 = \Delta y + y$$
$$Donde: x = 1;\ y = 1;\ x_1 = 0.99;\ y_1 = 1.02$$
$$\Delta x = x_1 - x \Rightarrow dx = (0.99 - 1) = -0.01; \quad \Delta y = y_1 - y \Rightarrow dy = (1.02 - 1) = 0.02$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \Rightarrow dz = 4(1)(1)^3(-0.01) + 6(1)^2(1)^2(0.02) = 0.08$$
$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \Rightarrow \Delta z = 2(0.99)^2(1.02)^3 - 2(1)^2(1)^3 \approx 0.08017992$$

EJEMPLO 16. Uno de los lados de un rectángulo es $a = 10\,cm$, el otro $b = 24\,cm$ ¿Cómo variara la diagonal L de este rectángulo si el dado a se alarga 4 mm y el lado b se acorta 1 mm? Hallar la magnitud aproximada de la variación y compararla con la exacta.



$$a = 10\,cm, b = 24\,cm, da = 0.4cm, db = -0.1cm$$

Por Pitágoras se tiene:

$$L = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow dL = \frac{\partial L}{\partial a}da + \frac{\partial L}{\partial b}db$$
$$dL = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}da + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}db \Rightarrow dL = \frac{10}{\sqrt{100+576}}(0.4) + \frac{24}{\sqrt{100+576}}(0.1)$$
$$dL = \frac{4}{26} - \frac{2.4}{26} = \frac{1.6}{26} \cong 0.062\,cm$$
$$\Delta L = \sqrt{(a+\Delta a)^2 + (b+\Delta b)^2} - \sqrt{a^2+b^2} = 0.065\,cm$$

EJEMPLO 17. Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son de 10 cm, 8 cm y 6 cm; está hecha de madera contrachapada de 2 mm de espesor. Determinar el volumen aproximado del material que se gastó en hacer la caja.

Sean x, y, z las dimensiones de la caja, luego el volumen de la caja es $V = xyz$, además $x = 10\,cm, y = 8\,cm, z = 6cm$ y $dx = dy = dz = 0.4\,cm$

$$V(xyz) = xyz \Rightarrow dv = (yz)\,dx + (xz)dy + (xy)dz$$
$$dv = (8)(6)(0.4) + (10)(6)(0.4) + (10)(8)(0.4) \Rightarrow dv = (48+60+80)(0.4) \Rightarrow dv = 75.2cm^3$$

EJEMPLO 17. El periodo T de oscilación del péndulo se calcula por la formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde L es la longitud del péndulo y g, la aceleración de la gravedad. Hallar el error que se comete al determinar T, como resultado de los pequeños errores $\Delta L = \alpha, \Delta g = \beta$ cometidos al medio L y g.

El error que se comete al determinar T es:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial L}\Delta L + \frac{\partial T}{\partial g} \Rightarrow dT = \frac{\pi}{\sqrt{gL}}\alpha - \frac{\pi\sqrt{L}}{g\sqrt{g}}\beta = \frac{\pi(g\alpha - L\beta)}{g\sqrt{gL}} \therefore dT = \frac{\pi(g\alpha - L\beta)}{g\sqrt{gL}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

Determine las primeras derivadas parciales de las funciones dadas

$1)w=\dfrac{x^2}{\left(y^2+z^2\right)}$; $2)f(x,y)=e^{-x}\cos(y)+e^{-y}\cos(x)$; $3)f(x,y)=\dfrac{(xy)}{\left(x^2-y^2\right)}$

$4)f(x,y)=e^x\cos y$; $5)f(x,y)=e^y senx$; $6)f(x,y)=\left(3x^2+y^2\right)^{-1/3}$

$7)f(x,y)=\sqrt{\left(x^2-y^2\right)}$; $8)g(x,y)=e^{-xy}$; $9)f(s,t)=\dfrac{1}{\left(s^2-t^2\right)^2}$

$10)f(s,t)=\ln(s^2-t^2)$; $11)f(x,y)=\left[1+(4x-7y)\right]^{-1}$; $12)f(w,z)=warcsen\left(\dfrac{w}{z}\right)$

$13)f(x,y)=y\cos\left(x^2+y^2\right)$; $14)f(s,t)=e^{t^2-s^2}$; $15)f(x,y)=2senx\cos y$

$16)f(r,\theta)=3r^3cos(2\theta)$; $17)\ f(r,s,t)=r^2e^{2s}\cos t$

$18)\ f(q,v,w)=arcsen\left(\sqrt{qv}\right)+sen(vw)$ $19)w=\dfrac{x^2}{(x+y)}$

$20)\ w(u,v,t)=u^4vt^2-3uv^2t^3$; $21)w(u,v)=\tan(uv)+2Ln(u+v)$

$22)\ f(x,y)=\sqrt{4x^2-y^2}\sec x$; $23)\ f(r,s,v,p)=r^3\tan s+\sqrt{s}e^{v^2}-v\cos(2p)$

$24)w(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $25)w(x,y,z)=3x^2y^3z+2xy^4z^2-yz$

$26)v(x,y,z)=y\ln\left(x^2+z^4\right)$ $27)\ f(x,y,z)=xe^z-ye^x+ze^{-y}$;

$28)w(x,y)=xy^4-2x^2y^3+4x^2-3y$; $29)w(x,y)=y^2e^{x^2}+\left[\dfrac{1}{\left(x^2y^2\right)}\right]$

$30)\ f(x,y)=x\cos(\tfrac{x}{y})$; $31)w(r,s,t)=r^4s^3t-3s^2e^{rt}$

$32)w(x,y)=x^3e^{-2y}+y^{-2}\cos(x)$

$33)\ f(x,y,t)=\dfrac{(x^2-t^2)}{(1+sen3y)}$; $34)\ f(x,y,z)=xyze^{xyz}$

$35)\lambda(x,y,z,t)=\dfrac{t\cos x}{1+xyzt}$ $36)\ f(w,x,y,z)=x\ln(wxyz)$

$37)u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)}$; $38)u(x,y,t)=\dfrac{1}{4\pi kt}e^{\left(-\frac{x^2+y^2}{4kt}\right)}$

$39)r(x,y,z)=(x+y)(x+z)(y+z)-(x+y)^2-(x+z)^2(y+z)^2$

$40)r(x,y,z)=sen\left(\dfrac{\sqrt{xy^2z^3}}{\sqrt{x+2y+3z}}\right)$ $41)r(x,y,z)=e^{(xz-xy)}+e^{(xy-yz)}+e^{(yz-xz)}$

$42)\ f(x,y)=x^3-y^3-3axy$; $43)\ f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

$44)\ f(x,y)=\dfrac{y}{x}$; $45)\ f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

46) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$ 47) $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)$

48) $f(x,y)=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right);$ 49) $f(x,y)=x^y$

50) $f(x,y)=e^{sen\left(\frac{y}{x}\right)};$ 51) $f(x,y)=arcsen\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

52) $f(x,y)=\ln\left(sen\left(\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}\right)\right)$ 53) $u(x,y,z)=(xy)^z$; 54) $u(x,y,z)=z^{xy}$

55) Hallar $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$ si $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$

56) Hallar $f_x(1,2,0)$, $f_y(1,2,0)$ y $f_z(1,2,0)$ sí $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$.

57) $f(w,x,y,z)=sen(w)sen(x)\cos(y)\cos(z)$

58) $f(wxyz)=x\ln(wxyz)$

59) $f(x,y,z)=e^{-xyz}-\ln(xy-z^2)$, **determine** $f_x(x,y,z)$.

60) $f(x,yz)=\left(\dfrac{xy}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$, **determine** $f_x(-2,-1,8)$.

61) $r(x,y,z)=e^{(yz+xz+xy)}$ **determine sus derivadas parciales**

62) Demostrar que: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ si $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$

63) Demostrar que $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, si $u=(x-y)(y-z)(z-x)$

64) Demostrar que $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$, si $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$

Hallar las diferenciales totales de las siguientes funciones.

65) $f(x,y)=z=x^3+y^3-3xy$ 66) $f(x,y)=z=x^2y^3$

67) $f(x,y)=z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 68) $f(x,y)=z=yx^3$

69) $f(x)=z=\ln(x^2+y^2)$ 70) $f(x,y)=\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$

71) $f(x,y)=z=\ln tg\left(\dfrac{y}{x}\right)$

72) Hallar $dif(1,1)$ si $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$

73) $u(x,y,z)=xyz$ 74) $u(x,y)=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^2$

$75) u(x,y,z) = arctg\left(\frac{xy}{z^2}\right)$

76) Hallar $df\left(3,4,5\right)$ si $f\left(x,y,z\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Use la diferencial total dz para aproximar el cambio en z cuando $\left(x,y\right)$ se mueve en De los dos puntos P a Q.

$77) z = x^2 - 5xy + y;\ P\left(2,3\right), Q\left(2.03, 2.98\right)$

$78) z = \ln\left(x^2 y\right); P\left(-2,4\right), Q\left(-1.98, 3.96\right)$

$79) z = \tan^{-1} xy; P\left(-2,-0.5\right), Q\left(-2.03,-0.51\right)$

Para la función $f\left(x,y\right) = x^2 y$, hallar el incremento total y la diferencial total en el punto $\left(1,2\right)$ compararlo entre sí.

$80) \Delta x = 1; \Delta y = 2$

$81) \Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$

82) Demostrar, que para las funciones u y v de varias variables (por ejemplo de dos) se verifican las reglas ordinarias de derivación. $d\left(u+v\right) = du + dv$

83) Al determinar la gravedad específica de un objeto se ve que su peso en el aire es $A = 36$ libras, mientras que su peso en el agua es $W = 20$ libras, con un posible error de 0.02 libras en cada medición. Determine, aproximadamente, el error máximo posible al calcular su gravedad específica S, donde $S = \frac{A}{\left(A-W\right)}$.

84) Use diferenciales para determinar la cantidad aproximada de cobre en los cuatro lados y el fondo de un tanque de cobre rectangular que mide 6 pies de largo, 4 pies de ancho y 3 pies de profundidad en el interior, si la hoja de cobre tiene $\frac{1}{4}$ de pulgadas de espesor. Sugerencia: haga un bosquejo.

85) El radio y la altura de un cono circular recto se miden con errores de a lo más 2% y 3%, respectivamente. Use diferenciales para estimar el error porcentual máximo en el volumen calculado

86) El periodo T de un péndulo de longitud L está dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Demuestre que $\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left[\frac{dL}{L} - \frac{dg}{g}\right]$, y use este resultado para estimar el error porcentual máximo en T debido a un error de 0.5% al medir L y 0.3% al medir g.

87) La fórmula $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ determina la resistencia combinada R cuando los resistores con, resistencias R_1 y R_2, se conectan en paralelo. Suponga que R_1 y R_2 midieron cerca de 25 y 100 ohms, respectivamente, con errores posibles de 0.5 ohms en cada medición. Calcule R y dé una estimación para el error máximo en este valor.

88) El ángulo central de un sector circular es igual a 80^{o} y se desea disminuirlo en 1^{o} ¿En cuánto hay que alargar el radio del sector, para que su área no varíe, si su longitud inicial era igual a 20 cm?

89) Demostrar, que el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

90) Al medir en un lugar el triángulo ABC, se obtuvieron los datos siguientes: el lado $a=100\,m\pm 2\,m$ el lado $b=200\,m\pm 3\,m$ y el ángulo $c=60^{o}\pm 1^{o}$ ¿Con que grado de exactitud puede calcularse el lado c?

91) La distancia entre los puntos $P_0\left(x_0,y_0\right)$ y $P\left(x,y\right)$ es igual a ρ, y el ángulo formado por el vector $\overrightarrow{P_0P}$ con el eje OX, es igual a α. ¿En cuánto variara el ángulo α, si el punto P toma la posición $P_1\left(x+dx,y+dy\right)$, mientras que el punto P_0 sigue invariable?

92) El volumen *V* de un cilindro circular recto está dado por $V=\pi r^2 h$, donde *r* es el radio y *h* es la altura. Si *h* se mantiene fijo en $h=10$ pulgadas, determine la razón de cambio de *V* respecto a *r* cuando $r=6$ pulgadas.

93) La temperatura, en grados Celsius, en una placa metálica en el plano *xy* está dado por $T\left(x,y\right)=4+2x^2+y^3$. ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia (medida en pies) si comenzamos a movernos desde $\left(3,2\right)$ en la dirección del eje *y* positivo?

94) De acuerdo con la ley del gas ideal, la presión, la temperatura y el volumen de un gas se relacionan mediante $PV=kT$, donde *k* es una constante. Determine la razón de cambio de la presión (libras/cuadradas pulgadas) con respecto a la temperatura cuando la temperatura es de $300^{o}K$, si el volumen se mantiene fijo en 100 pulgadas cúbicas.

95) Muestre que, para la ley del gas del problema 103 $V\frac{\partial P}{\partial V}+T\frac{\partial P}{\partial T}=0$ y $\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}=-1$.

96) Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $36z = 4x^2 + 9y^2$ y el plano $x = 3$ en el punto $(3,2,2)$.

97) Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $3z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ y el plano $x = 1$ en el punto $\left(1,-2,\frac{\sqrt{11}}{3}\right)$.

98) Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $2z = \sqrt{9x^2 + 9y^2 - 36}$ y el plano $y = 1$ en el punto $\left(2,1,\frac{3}{2}\right)$.

99) Calcule de la pendiente de la tangente a la curva de intersección del cilindro $4z = 5\sqrt{16 - x^2}$ y el plano $y = 3$ en el punto $\left(2,3,\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

100) Sea $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}, & (x;y) \neq (0;0) \\ 0, & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

a) Si $(x; y) \neq (0; 0)$, calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.
b) Mostrar que $(\partial f/\partial x)(0; 0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0; 0)$.