ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS CON FACTOR INTEGRANTE

ECUACIONES DIFERECIALES TRANSFORMABLES A EXACTAS

Algunas ecuaciones diferenciales $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ pueden resultar no ser exactas, es decir no se cumple que: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ por lo tanto se necesita un factor integrante.

Un factor integrante que solo depende de x es: $\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$

Un factor integrante que depende de y: $\mu(y) = e^{\int K(y)dy}$

Las ideas del factor integrante y exactitud son:

Si se da el caso de que: $\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = h(x)$ es una función que depende solamente de "x", entonces el factor integrante es: $\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$

Ahora si ese factor integrante se multiplica por la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, la ecuación se transforma en una ecuación diferencial exacta.

De la misma manera sí: $\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] = K(y)$ es una función solamente de "y" entonces el factor integrante es: $\mu(y) = e^{\int K(y)dy}$ que multiplicado por la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ la transforma en exacta.

En **DERIVE**, dada la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se comprueba si es o no exacta, en caso de no ser exacta, aplicamos el siguiente comando para resolver dicha ecuación.

INTEGRATING_FACTOR_GEN(M(x,y),N(x,y),x,y,k)

El resultado obtenido es la solución general de la ecuación diferencial dada, no es necesario determinar el factor integrante, luego multiplicar la EDO por ese factor, y después aplicar el comando de ecuaciones exactas.

En el caso que la EDO, tenga condiciones iniciales, se aplica el siguiente comando:
INTEGRATING_FACTOR(M(x,y),N(x,y),x,y,x_0,y_0), para obtener la solución particular, según las condiciones dadas.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

También pueden utilizar este comando, pero vea bien el orden de las funciones, para no tener problemas en las soluciones.

INTEGRATING_FACTOR_GEN(N(x,y),M(x,y),y,x,k)

EJEMPLO 1: Resolver $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluacion\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $\frac{y}{x}\cdot dx+(y^3-LN(x))\cdot dy=0$

#4: $M(x, y) := \frac{y}{x}$

#5: $N(x, y) := y^3 - LN(x)$

#6: $\frac{d}{dy}\frac{y}{x}$

#7: $\frac{1}{x}$

#8: $\frac{d}{dx}(y^3-LN(x))$

#9: $-\frac{1}{x}$

SE COMPRUEBA QUE NO ES EXACTA, AHORA APLICAMOS EL COMANDO PARA SOLUCIONARLA

#10: InputMode := Character

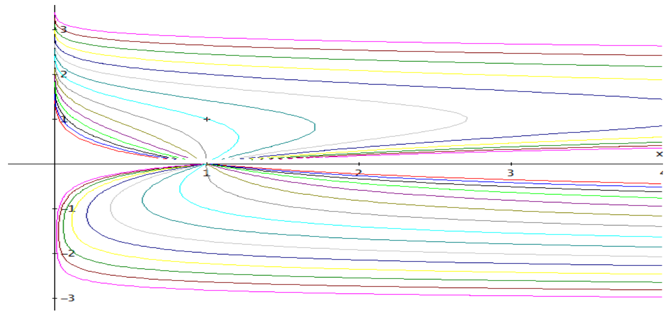
#10: $INTEGRATING\_FACTOR\_GEN\left(\frac{y}{x}, y^3 - LN(x), x, y, k\right)$

#11: $\frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=k$

#12: $VECTOR\left(\frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=k, k, -3, 4, 0.5\right)$

#13: $\left[\frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=-3, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=-\frac{5}{2}, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=-2, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=-\frac{3}{2}, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=-1, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=-\frac{1}{2}, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=0, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=1, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=\frac{3}{2}, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=2, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=\frac{5}{2}, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=3, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=\frac{7}{2}, \frac{LN(x)}{y}+\frac{y^2}{2}=4\right]$

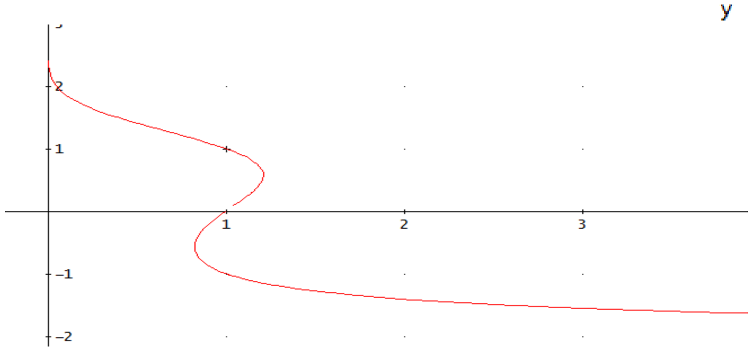
Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas



En el caso que den las condiciones iniciales $y(1)=1$, en el ejemplo anterior, el comando a utilizar es el siguiente:

#14: $\text{INTEGRATING\_FACTOR}\left(\dfrac{y}{x},\ y^3 - \text{LN}(x),\ x,\ y,\ 1,\ 1\right)$

#15: $$\frac{\text{LN}(x)}{y} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}$$



EJEMPLO 2: Resolver $(e^y + e^{-x})dx + (e^y + 2ye^{-x})dy = 0$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $(e^y + e^{-x})\cdot dx + (e^y + 2\cdot y\cdot e^{-x})\cdot dy$

#4: $M(x,\ y) := e^y + e^{-x}$

#5: $N(x,\ y) := e^y + 2\cdot y\cdot e^{-x}$

#6: $\dfrac{d}{dy}(e^y + e^{-x})$

#7: $$e^y$$

#8: $\dfrac{d}{dx}(e^y + 2\cdot y\cdot e^{-x})$

#9: $$-2\cdot y\cdot e^{-x}$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

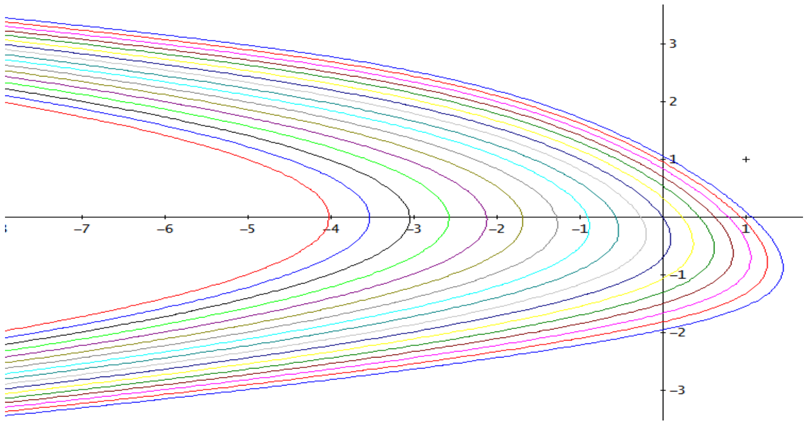
#10: InputMode := Character

#11: $\text{INTEGRATING\_FACTOR\_GEN}(e^{y}+e^{-x},\ e^{y}+2\cdot y\cdot e^{-x},\ x,\ y,\ k)$

#12: $$e^{x+y}+x+y^{2}=k$$

#13: $\text{VECTOR}(e^{x+y}+x+y^{2}=k,\ k,\ -4,\ 4,\ 0.5)$

#14: $\left[e^{x+y}+x+y^{2}=-4,\ e^{x+y}+x+y^{2}=-\frac{7}{2},\ e^{x+y}+x+y^{2}=-3,\ e^{x+y}+x+y^{2}=-\frac{5}{2},\ e^{x+y}+x+y^{2}=-2,\ e^{x+y}+x+y^{2}=-\frac{3}{2},\ e^{x+y}+x+y^{2}=-1,\ e^{x+y}+x+y^{2}=-\frac{1}{2},\ e^{x+y}+x+y^{2}=0,\ e^{x+y}+x+y^{2}=\frac{1}{2},\ e^{x+y}+x+y^{2}=1,\ e^{x+y}+x+y^{2}=\frac{3}{2},\ e^{x+y}+x+y^{2}=2,\ e^{x+y}+x+y^{2}=\frac{5}{2},\ e^{x+y}+x+y^{2}=3,\ e^{x+y}+x+y^{2}=\frac{7}{2},\ e^{x+y}+x+y^{2}=4\right]$



NOTA: Observen el procedimiento al cambiar el orden de las funciones, no afecta la familia de soluciones.

#15: $\text{INTEGRATING\_FACTOR\_GEN}(e^{y}+2\cdot y\cdot e^{-x},\ e^{y}+e^{-x},\ y,\ x,\ k)$

#16: $$e^{x+y}+x+y^{2}=k$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas