MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS A ECUACIONES DIFERENCIALES

La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama modelo matemático y se construye con ciertos objetivos.
Por ejemplo, podemos desear entender los mecanismos de cierto sistema al estudiar el Crecimiento y decaimiento exponencial, Periodo medio, Datación con radiocarbono, Ley de Newton del enfriamiento, Mezclas, Circuitos en serie, Término transitorio, Término de estado estable entre otros.

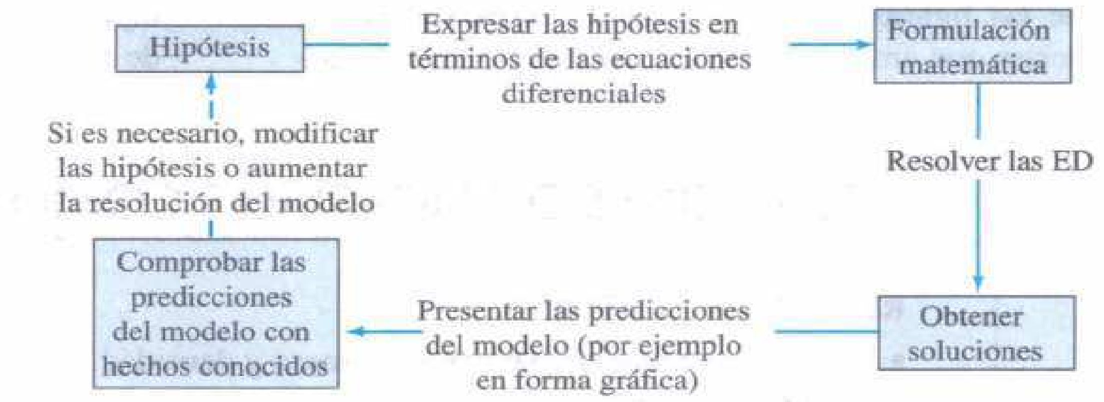
La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia con:

a) Identificación de las variables que ocasionan el cambio del sistema. Podremos elegir no incorporar todas estas variables en el modelo desde el comienzo. En este paso especificamos el nivel de resolución del modelo.

b) *Se* establece un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis, acerca del sistema que estamos tratando de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas que *se* pueden aplicar al sistema.

En otras palabras, el múdelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

PASOS DEL PROCESO DE MODELADO.



ALGUNOS MODELOS MATEMÁTICOS PREESTABLECIDOS

DINAMICA POBLACIONAL. Crecimiento y decaimiento. El problema de valor inicial

En términos matemáticos, si $P(t)$ denota la población al tiempo (t), entonces esta suposición se puede expresar como: $\frac{dP}{dt} = kP; P(t_0) = P_0$

En donde k es una constante de proporcionalidad, se emplea como modelo de distintos fenómenos donde intervienen crecimiento o decrecimiento (desintegración).

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

PERIODO MEDIO. En física, el periodo medio es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva $\frac{dA}{dt}=kA$. Es, simplemente, el tiempo que transcurre para que se desintegre o transmute la mitad de los átomos en una muestra inicial, A_0 y se conviertan en átomos de otro elemento. Mientras mayor sea su semivida, más estable es una sustancia.

DECAIMIENTO RADIOACTIVO.

El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables, esto es, los átomos se desintegran o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos.

Para modelar el fenómeno del decaimiento radiactivo**,** se supone que la razón $\frac{dA}{dt}=kA$ donde $A(t)$ es la sustancia que queda al tiempo (t)

Pueden observar que las ecuaciones dadas son exactamente iguales, la diferencia radica en la interpretación de los símbolos y de las constantes de proporcionalidad. En el caso del crecimiento, como esperamos en la ecuación $k>0$ y para la desintegración $k<0$

Nota: Una sola ecuación diferencial puede servir como modelo matemático de muchos fenómenos distintos.

LA TEORÍA DE DATACIÓN CON RADIOCARBONO. Método que emplea al carbono radiactivo para determinar las edades aproximadas de fósiles. La razón de la cantidad de C - l4 al carbono ordinario en la atmósfera parece ser constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Cuando muere un organismo la absorción del C - l4 sea por respiración o alimentación cesa. Así, si se compara la cantidad proporcional de C - 14 presentes, por ejemplo en un fósil, con la relación constante que existe en la atmosfera, es posible obtener una estimación razonable de su antigüedad.

El punto de partida es, $A(t)=A_0e^{kt}$ Para calcular el valor de la constante de decaimiento aplicamos el hecho que $\frac{A_0}{2}=A(5600)$, o sea, $\frac{A_0}{2}=A_0e^{5600k}$

LEY DE ENFRIAMIENTO, CALENTAMIENTO DE NEWTON

LEY DE NEWTON DEL ENFRIAMIENTO. En la formulación matemática de la ley empírica de Newton, relativa al enfriamiento de un objeto, se expresa con la ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dT}{dt}=k(T-T_m)$ en que k es una constante de proporcionalidad, T es la temperatura del objeto cuando $t>0$ y T_m es la temperatura ambiente; o sea, la temperatura del medio que rodea al objeto.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD

Una enfermedad contagiosa, por ejemplo un virus de gripe se propaga a través de una comunidad por personas que han estado en contacto con otras personas enfermas. Sea $x(t)$ el número de personas que han contraído la enfermedad y sea $y(t)$ el número de personas que aún no han sido expuestas al contagio. Es lógico suponer que la razón $\frac{dx}{dt}$ con la que se propaga la enfermedad es proporcional al número de encuentros, o interacciones, entre estos dos grupos de personas. Si suponemos que el número de interacciones es conjuntamente proporcional a $x(t)\ y\ y(t)$, esto es, proporcional al producto xy, entonces $\frac{dx}{dt}=kxy$ donde (k) es la constante usual de proporcionalidad.

Suponga que una pequeña comunidad tiene una población fija de n personas, si se introduce una persona infectada dentro de esta comunidad, entonces se podría argumentar que $x(t)\ y\ y(t)$ están relacionadas por $x+y=n+1$ Utilizando esta última ecuación para eliminar (y) en la ecuación $\frac{dx}{dt}=kxy$ se obtiene el modelo

$$\frac{dx}{dt}=kx(n+1-x)$$

REACCIONES QUÍMICAS

La desintegración de una sustancia radiactiva, caracterizada por la ecuación diferencial $\frac{dX}{dt}=kX$ se dice que es una reacción de primer orden.

Donde $X(t)$ es la cantidad de la sustancia A que permanece en cualquier momento, y k es una constante negativa ya que $X(t)$ es decreciente.

Un ejemplo de una reacción química de primer orden es la conversión del cloruro de terbutilo $(CH_3)_3CCI$ en alcohol t – butílico $(CH_3)_3COH$

$$(CH_3)_3CCl+NaOH\rightarrow(CH_3)_3COH+NaCl$$

Sólo la concentración del cloruro de terbutilo controla la rapidez de la reacción.

MEZCLAS.

Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones surge una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal contenida en la mezcla.

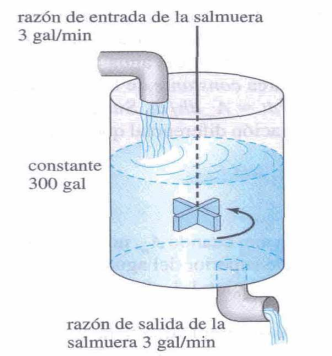
En forma general, al mezclar dos fluidos, a veces se originan ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Cuando describimos la mezcla de dos salmueras, la razón con que cambia la cantidad de sal en el tanque de mezcla es una razón neta dada por $A'(t)=\frac{dA}{dt}$

Supongamos que el tanque mezclador grande contiene inicialmente 300 galones de una solución de salmuera, otra solución de salmuera entra al tanque con una razón de $3\frac{gal}{\min}$;

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

la concentración de sal que entra es a razón de $2\dfrac{lb}{gal}$. Cuando la solución en el tanque está bien mezclada, sale con la misma **r**apidez con que entra.



Si $A(t)$ denota la cantidad de *sal* (medida en libras) en el tanque al tiempo (t)**,** entonces la razón con la que $A(t)$ cambia es una razón neta:

$$\frac{dA}{dt}=\begin{pmatrix}\text{razón con que}\\ \text{entra la sustancia}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{razón con que}\\ \text{sale la sustancia}\end{pmatrix}=R_1-R_2$$

$$R_1=\begin{pmatrix}\textit{concentración de la sal}\\ \textit{en el fluido de entrada}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{razón de entrada}\\ \textit{de la salmuera}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\textit{razón de entrada}\\ \textit{de la sal}\end{pmatrix};$$

$$R_1=\left(2\frac{lb}{gal}\right)\left(3\frac{gal}{\min}\right)=6\frac{lb}{\min}$$

Ahora, puesto que la solución sale del tanque con la misma razón con la que entra, el número de galones de la salmuera en el tanque al tiempo t es una constante de 300 galones. Por lo que la concentración de la sal en el tanque así como en el flujo de salida es. $c(t)=\dfrac{A(t)}{300lb/gal}$

$$R_2=\begin{pmatrix}\textit{concentración de la sal}\\ \textit{en el fluido de salida}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\textit{razón de salida}\\ \textit{de la salmuera}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\textit{razón de salida}\\ \textit{de la sal}\end{pmatrix}$$

$$R_2=\left(\frac{A}{300}\frac{lb}{gal}\right)\left(3\frac{gal}{\min}\right)=\frac{A}{100}\frac{lb}{\min}$$

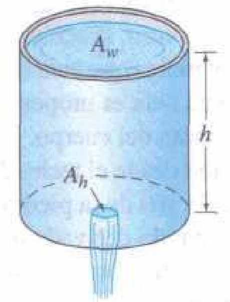
La razón neta $\dfrac{dA}{dt}=R_1-R_2=6-\left(\dfrac{A}{100}\right)\Rightarrow\dfrac{dA}{dt}+\dfrac{A}{100}=6$

DRENADO DE UN TANQUE.

En hidrodinámica, la ley de **Torricelli** establece que la rapidez v de salida del agua a través de un agujero de bordes afilados en el fondo de un tanque lleno con agua hasta una profundidad h es igual a la velocidad de un cuerpo (en este caso una *gota* de agua), que está cayendo libremente desde una altura h, esto es. $v=\sqrt{2gh}$ Donde g es la aceleración de la gravedad.

Esta última ecuación surge al igualar la *energía* cinética, $\frac{mv^2}{2}$ con la energía potencial, mgh y despejar v.

Para encontrar la profundidad h, del agua que queda en el tanque al tiempo t. Ver figura.



Se denota $V(t)$ al volumen de agua en el tanque al tiempo t**,** entonces. $\frac{dV}{dt}=-A_h\sqrt{2gh}$

Donde el signo menos indica que $V(t)$ está disminuyendo.

Si ahora el tanque es tal que el volumen del agua al tiempo (t) se expresa como $V(t)=A_w h$**,** donde A_w (en pies^2) es el área constante de la superficie superior del agua (véase la figura anterior), entonces $\frac{dV}{dt}=A_w\frac{dh}{dt}$**.** Sustituyendo esta última expresión en la ecuación $\frac{dV}{dt}=-A_h\sqrt{2gh}$ obtenemos la ecuación diferencial que deseábamos para expresar la altura del agua al tiempo *t:* $\frac{dh}{dt}=-\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}$

EJEMPLO. Considere un recipiente lleno de agua hasta una altura h. Suponga que el agua fluye a través de un orificio de sección transversal "a", el cual está ubicado en la base del tanque. Se desea establecer la altura de líquido en el tanque en cualquier instante t y el tiempo que este demora en vaciarse.

Sea $h(t)$ la altura de líquido en el tanque en cualquier instante t y $V(t)$ el volumen de agua del tanque en ese instante. La velocidad v del agua que sale a través del orificio es: $v=\sqrt{2gh}$ (1), donde g es la gravedad. La ecuación (1) representa la velocidad que una gota de agua adquiriría al caer libremente desde la superficie del agua hasta el agujero.

En condiciones reales, hay que tomar en cuenta la contracción que sufre un chorro de agua en un orificio, por lo que se tendrá $v=c\sqrt{2gh}$ (2), donde c es el coeficiente de descarga comprendido entre 0 y 1 $(0<c<1)$.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Nota: Cuando el valor del coeficiente de descarga c no se indica, se asume que $c = 1$

Según la Ley de Torricelli, la razón con la que el agua sale por el agujero (variación del volumen de líquido en el tanque respecto del tiempo) se puede expresar como el área "a" del orificio de salida por la velocidad v del agua drenada, esto es $\frac{dV}{dt} = -av$ (3)

sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (3) $\frac{dV}{dt} = -ac\sqrt{2gh}$ (4)

Si $A(h)$ denota el área de la sección transversal horizontal del tanque a la altura h, aplicando el método del volumen por secciones transversales se obtiene $V = \int_0^h A(h)\,dh$

derivando respecto de t y aplicando el teorema fundamental del cálculo $\frac{dV}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}$ (5)

Comparando las ecuaciones (3) y (5) $A(h)\frac{dh}{dt} = -ac\sqrt{2gh}$ (6)

Sean h la altura de líquido en el tanque en cualquier instante t, "a" el área del orificio de salida el cual está ubicado al fondo del tanque, g la gravedad, C el coeficiente de descarga y $A(h)$ el área de la sección transversal del tanque. La **ecuación diferencial asociada al problema de vaciado del tanque es** $A(h)\frac{dh}{dt} = -ac\sqrt{2gh}$

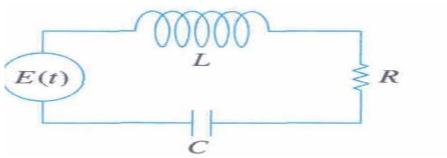
Esta es una ecuación diferencial de variables separables, la cual al resolverse sujeta a la condición de conocer la altura inicial h_0 para el tiempo $t = 0$, permite obtener la ley de variación de la altura de líquido en el tanque en función del tiempo.

Si, además, hay aporte de líquido al tanque, la ecuación diferencial es:

$$A(h)\frac{dh}{dt} = Q - ac\sqrt{2gh}$$

CIRCUITOS EN SERIE.

Considere el circuito en serie simple que tiene un inductor, un resistor y un capacitor que se muestra en la figura.



En un circuito con el interruptor cerrado, la comente se denota por $i(t)$ y la carga en el capacitor al tiempo (t) se denota por $q(t)$. Las letras ***L***, ***R*** y **C** son conocidas como inductancia, resistencia y capacitancia, respectivamente y *en* general son constantes.

Ahora de la segunda ley de Kirchhoff establece el voltaje aplicado $E(t)$ a un circuito cerrado debe ser igual a la suma de las caídas de voltaje en el circuito.

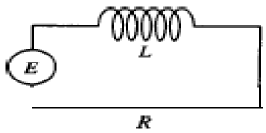
Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Las fórmulas de las caídas respectivas de voltaje a través de un inductor, un capacitor y un resistor son:

$$inductor: L\frac{di}{dt}=L\frac{d^2q}{dt^2}; resistor: iR=R\frac{dq}{dt}; capacitor: \frac{1}{C}q$$

Como la corriente $i(t)$ está relacionada con la carga $q(t)$ en el capacitor mediante $i=\frac{dq}{dt}$, sumamos los tres voltajes e igualando la suma de los voltajes con el voltaje aplicado se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden: $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$

Cuando un circuito en serie sólo contiene un resistor y un inductor (circuito LR), la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje a través del inductor $\left(L\left(\frac{di}{dt}\right)\right)$ y del resistor iR es igual al voltaje aplicado al circuito $E(t)$

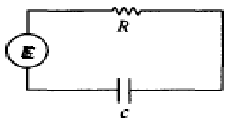


Con lo anterior se obtiene la ecuación diferencial lineal que describe la corriente $i(t)$

$L\frac{di}{dt}+Ri=E(t)$ Donde L y R son las constantes conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente. La corriente $i(t)$ se llama, también, respuesta del sistema.

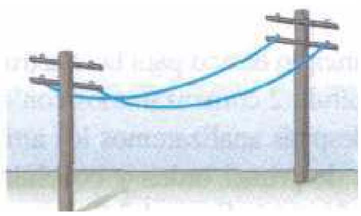
La caída de voltaje para el circuito en serie **RC** (ver figura), a través de un capacitor de capacitancia C es $\frac{q(t)}{C}$, donde $q(t)$ es la carga del capacitor, por La segunda ley de Kirchhoff establece $Ri+\frac{1}{C}q=E(t)$ pero la corriente (i) y la carga $q(t)$ se relacionan mediante $i=\frac{dq}{dt}$ así, la ecuación se transforma en la ecuación diferencial lineal

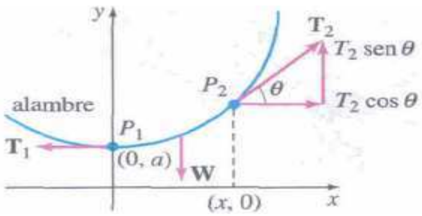
$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$$



CABLES SUSPENDIDOS

Un cable flexible, alambre o cuerda pesada que está suspendida entre dos soportes verticales.





Debido al equilibrio estático podemos escribir.

$T_1 = T_2 \cos\theta \;\; y \quad W = T_2 sen\theta$

Al dividir $T_1 = T_2 \cos\theta \;\; y \quad W = T_2 sen\theta \Rightarrow \frac{W}{T_1} = \tan\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}$

APLICACIONES CON DERIVE

EJEMPLO 1. Al sacar un pastel de un horno, su temperatura es de 300°F, en un tiempo $t = 0$. A una temperatura ambiente de 70°F. Luego de tres minutos, su temperatura es de 200°F. Hallar, a. La ecuación que determina la temperatura en cualquier instante de tiempo t, y b. La respectiva tabla y gráfica.

Modelo: $\frac{dT}{dt} = k(T-70)$ valores iniciales de las variables: $t = 0; T = 300$

```
#1:   LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2:   InputMode := Word

#3:   CaseMode := Sensitive

      dT
#4:   ── = k·(T - 70)
      dt
VALORES INICIALES t= 0;   T=300

#5:   SEPARABLE(K, T - 70, t, T, 0, 300)

#6:                                            LN(T - 70) = LN(230) + K·t

SE DESPEJA LA TEMPERATURA T

#7:   SOLVE(LN(T - 70) = LN(230) + K·t, T, Real)

                                                          K·t
#8:                                            T = 230·e     + 70

AHORA SE SUSTITUYEN LOS VALORES t= 3  y T=200

                                                            3·K
#9:                                            200 = 230·e     + 70

SE CALCULA EL VALOR DE k

                         3·K
#10:  NSOLVE(200 = 230·e     + 70, K, Real)

#11:                                           K = -0.1901816204

SE SUSTITUYE EL VALOR DE k EN LA EXPRESIÓN # 8, PARA OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICILAR DE LA EDO

                                                      - 0.1901816203·t
#12:                                       T = 230·e                  + 70
```

Por lo tanto, esa solución particular o específica, de la ecuación diferencial determina la temperatura en cualquier instante de tiempo t.

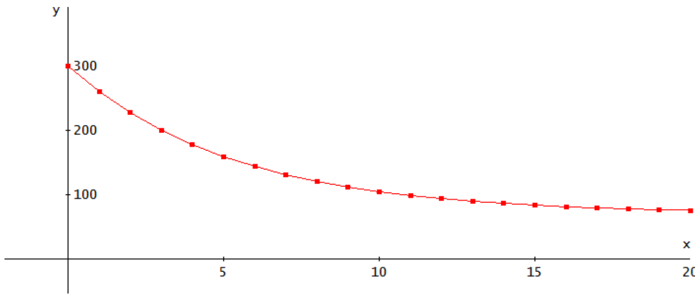
Ahora definimos la solución particular para hacer luego la tabla de valores:

```
                      - 0.1901816203·t
#13:  T(t) := 230·e                   + 70
```

Para realizar la tabla de valores aplicamos el comando **TABLA(t) ≔ VECTOR([i, T(i)], i, 0, t)**

#14: TABLA(t) ≔ VECTOR([i, T(i)], i, 0, t)

#15: TABLA(20)



EJEMPLO 2. Se realizara un respectivo análisis de una colonia de bacterias, que crecen en cultivo a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay 300 colonias de bacterias en el cultivo y en un tiempo de 2 horas el número ha crecido un 20%. Hallar: a) La ecuación que determina la población en cualquier instante de tiempo t b) La respectiva tabla y gráfica.

Modelo: $\frac{dP}{dt} = kP$ valores iniciales de las variables: $t = 0;\ p = 300$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: CaseMode ≔ Sensitive

#3: InputMode ≔ Word

#4: $\frac{dP}{dt} = kP$

#5: InputMode ≔ Character

#6: SEPARABLE(k, P, t, P, 0, 300)

#7: $LN(P) = LN(300) + k\cdot t$

#8: SOLVE(LN(P) = LN(300) + k·t, P, Real)

#9: $P = 300\cdot e^{k\cdot t}$

SUSTITUIMOS LOS VALORES t= 2 y P ES EL 20% MAS DEL VALOR INICIAR, ENTONCES P= 360

#10: $360 = 300\cdot e^{2\cdot k}$

SE CALCULA EL VALOR DE k

#11: NSOLVE$(360 = 300\cdot e^{2\cdot k}$, k, Real)

#12: $k = 0.09116077795$

SE SUSTITUYE EL VALOR DE k EN LA EXPRESIÓN #9 PARA OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE EDO

#13: $P = 300\cdot e^{0.09116077795\cdot t}$

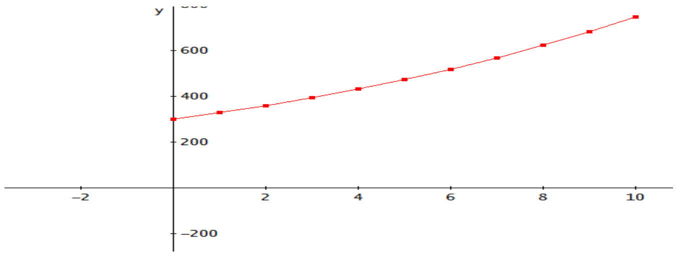
#14: $P(t) ≔ 300\cdot e^{0.09116077795\cdot t}$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

```
#15:   TABLA(t) := VECTOR([i, P(i)], i, 0, t)
#16:   TABLA(10)
```

#17:

0	300
1	328.6335343
2	360
3	394.3602408
4	432
5	473.2322886
6	518.3999986
7	567.8787458
8	622.0799977
9	681.4544944
10	746.4959966



EJEMPLO 3. Se aplica una fuerza electromotriz de 100V en circuito en serie RC, donde el valor de la resistencia es $200\,\Omega$ y una capacitancia de $0.0001F$ Hallar: a) la función $q(t)$ que establece carga para $q(0)=0$ b) intensidad de la corriente

Modelo: $R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$ valores iniciales de las variables $t=0\,;q=0$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: CaseMode := Sensitive

#3: InputMode := Word

#4: $E(t) := R\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

PERO SABEMOS QUE: E(t)= 100V; R= 200 OHM Y C= 0.0001 F

#5: $100 = R\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

#6: $100 = \frac{200\cdot dq}{dt} + 10000\cdot q$

DESPEJANDO NOS QUEDA-

#7: $\frac{dq}{dt} = \frac{100 - 10000\cdot q}{200}$

#8: $\frac{dq}{dt} = 0.5\cdot(1 - 100\cdot q)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#9: InputMode := Character

#10: SEPARABLE(1, 0.5·(1 − 100·q), t, q, 0, 0)

#11: $\mathrm{LN}(100\cdot q - 1) = -50\cdot t + \pi\cdot i$

#12: SOLVE(LN(100·q − 1) = − 50·t + π·i, q, Real)

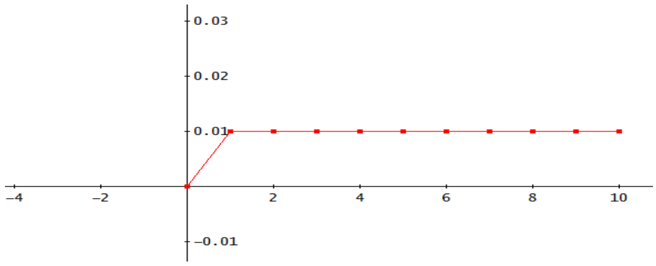
#13: $$q = \frac{1}{100} - \frac{e^{-50\cdot t}}{100}$$

#14: $$q(t) := \frac{1}{100} - \frac{e^{-50\cdot t}}{100}$$

#15: TABLA(t) := VECTOR([i, q(i)], i, 0, t)

#16: TABLA(10)

#17: $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.01 \\ 2 & 0.01 \\ 3 & 0.01 \\ 4 & 0.01 \\ 5 & 0.01 \\ 6 & 0.01 \\ 7 & 0.01 \\ 8 & 0.01 \\ 9 & 0.01 \\ 10 & 0.01 \end{bmatrix}$$



Esta es la solución particular o específica, de la ecuación diferencial que determina la carga en cualquier instante de tiempo t.
Ahora, para determinar la solución particular, de la ecuación diferencial, que determina la intensidad de la corriente en cualquier instante de tiempo t, Se debe realizar la derivada de la función de la carga. $i = \dfrac{dq}{dt}$

#18: $$i(t) := \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{100} - \frac{e^{-50\cdot t}}{100}\right)$$

#19: $$i(t) := \frac{e^{-50\cdot t}}{2}$$

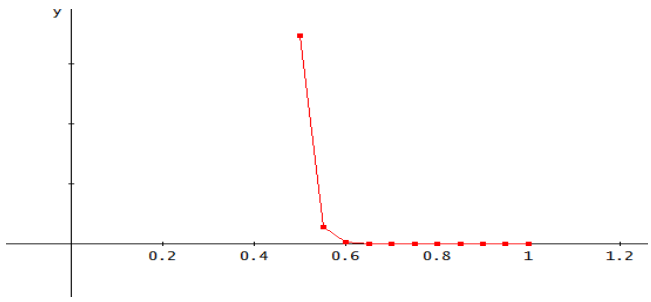
#20: TABLA(t) := VECTOR([n, I(n)], n, 0.5, t, 0.05)

#21: TABLA(1)

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#22:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 6.943971932\cdot10^{-12} \\ 0.55 & 5.699959265\cdot10^{-13} \\ 0.6 & 4.678811484\cdot10^{-14} \\ 0.65 & 3.840602342\cdot10^{-15} \\ 0.7 & 3.152558380\cdot10^{-16} \\ 0.75 & 2.587777503\cdot10^{-17} \\ 0.8 & 2.124177127\cdot10^{-18} \\ 0.85 & 1.743630766\cdot10^{-19} \\ 0.9 & 1.431259290\cdot10^{-20} \\ 0.95 & 1.174849168\cdot10^{-21} \\ 1 & 9.643749239\cdot10^{-23} \end{bmatrix}$$



EJEMPLO 4. Un tanque mezclador contiene 300 galones de salmuera otra solución se bombea al tanque a razón de $3\dfrac{gal}{\min}$, la concentración de sal en este efluente es de $2\dfrac{lb}{gal}$. La solución bien agitada se desaloja a la misma razón. Si a $A(t)$, denota la cantidad de sal medida en libras en el tanque en un tiempo (t), encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante de tiempo (t), si había 50 libras de sal disueltas en los 300 galones iniciales.

Modelo: $\dfrac{dA}{dt} = R_1 - R_2 = 6 - \left(\dfrac{A}{100}\right)$ (ya calculado anteriormente)

Valores iniciales de las variables: $t = 0$; $A = 50$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: CaseMode := Sensitive

#3: InputMode := Word

#4: $\dfrac{dA}{dt} = 6 - \dfrac{A}{100}$

#5: InputMode := Character

#6: $\text{SEPARABLE}\left(1,\ 6 - \dfrac{A}{100},\ t,\ A,\ 0,\ 50\right)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#7: $\text{LN}(A - 600) = \text{LN}(550) - \frac{t}{100} + \pi \cdot i$

#8: $\text{SOLVE}\left(\text{LN}(A - 600) = \text{LN}(550) - \frac{t}{100} + \pi \cdot i,\ A,\ \text{Real}\right)$

#9: $A = 600 - 550 \cdot e^{-t/100}$

Esta es la solución particular de la ecuación diferencial, que determina la cantidad de sal en cualquier instante de tiempo t.

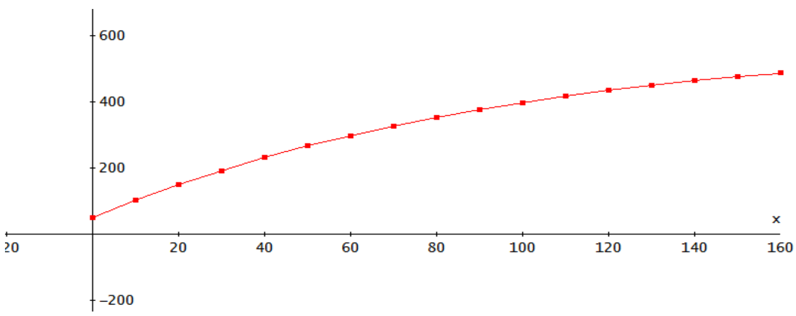
#10: $A(t) := 600 - 550 \cdot e^{-t/100}$

#11: TABLA(t) := VECTOR([i, A(i)], i, 0, t, 10)

#12: TABLA(200)

#13:

0	50
10	102.3394200
20	149.6980858
30	192.5499786
40	231.3239746
50	266.4081371
60	298.1536001
70	326.8780829
80	352.8690697
90	376.3866871
100	397.6663073
110	416.9209039
120	434.3431834
130	450.1075138
140	464.3716698
150	477.2784119
160	488.9569151
170	499.5240617
180	509.0856114
190	517.7372594
200	525.5655942



Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 5. El ácido valproic es un medicamento que se emplea para controlar la epilepsia; su vida media en el cuerpo humano es de unas 15 horas. ¿A qué hora quedará 10% de la dosis original?

Modelo: $\frac{dQ}{dt}=-kQ$ Valores iniciales de las variables: $t=0; Q=q$ Donde q representa cantidad inicial del medicamento.

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: CaseMode := Sensitive

#3: InputMode := Word

#4: $\frac{dQ}{dt} = -kQ$

#5: InputMode := Character

#6: SEPARABLE(-k, Q, t, Q, 0, q)

#7: $LN(Q) - LN(q) = - k\cdot t$

#8: SOLVE(LN(Q) - LN(q) = - k·t, Q, Real)

#9: $Q = q\cdot e^{- k\cdot t}$

COMO LA VIDA MEDIA ES DE 15 HORAS, SABEMOS QUE LA CANTIDAD RESTANTE Q= 0.5q cuando t= 15 horas

#10: $\frac{q}{2} = q\cdot e^{- 15\cdot k}$

#11: $SOLVE\left(\frac{q}{2} = q\cdot e^{- 15\cdot k}, k, Real\right)$

#12: $k = \frac{LN(2)}{15}$

#13: $k = 0.04620981203$

#14: $Q(t) := q\cdot e^{- 0.04620981203\cdot t}$

UTILIZANDO LA CONDICIÓN Q= 0.10q ES DECIR EL 10% DE LA DOSIS ORIGINAL

#15: $0.1\cdot q = q\cdot e^{- 0.04620981203\cdot t}$

#16: $q = 10\cdot q\cdot e^{- 0.04620981203\cdot t}$

#17: $SOLVE(q = 10\cdot q\cdot e^{- 0.04620981203\cdot t}, t, Real)$

#18: $t = \frac{100000000000\cdot LN(10)}{4620981203}$

#19: $t = 49.82892143$

Aproximadamente, en un tiempo de 50 horas

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 6. ¿Cuánto tiempo tardará para que el 90% de la contaminación sea eliminada del lago de Maracaibo? Suponiendo que no se viertan más contaminantes.

Modelo: $\frac{dQ}{dt}=-r\frac{Q}{v}$ Valores iniciales de las variables: $t=0; Q=q$ Donde q representa cantidad inicial de contaminación. $\frac{r}{v}=0.03224489796$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: CaseMode := Sensitive

#3: InputMode := Word

#4: $\frac{dQ}{dt} = -\frac{r}{v}\cdot Q$

#5: $\text{SEPARABLE}\left(1,\ -\frac{r}{v}\cdot Q,\ t,\ Q,\ 0,\ q\right)$

#6: $\frac{v\cdot LN(Q)}{r} - \frac{v\cdot LN(q)}{r} = -t$

#7: $\text{SOLVE}\left(\frac{v\cdot LN(Q)}{r} - \frac{v\cdot LN(q)}{r} = -t,\ Q,\ Real\right)$

#8: $Q = q\cdot e^{-r\cdot t/v}$

PERO r/v= 0.03224489796

#9: $Q(t) := q\cdot e^{-0.03224489796\cdot t}$

CUANDO EL 90% DE LA CONTAMINACIÓN SE HAYA ELIMINADO DEL LAGO RESTA EL 10% DE LA CONTAMINACIÓN, ES DECIR Q= 0.1q

#10: $0.1\cdot q = q\cdot e^{-0.03224489796\cdot t}$

#11: $\text{SOLVE}(0.1\cdot q = q\cdot e^{-0.03224489796\cdot t},\ t,\ Real)$

#12: $t = \frac{25000000000\cdot LN(10)}{806122449}$

#13: $t = 71.40928452$

Aproximadamente 72 años

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 7. Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la milésima parte de la cantidad original de C - 14. Determine la edad del fósil.

Modelo: $\frac{dA}{dt} = kA$ Valores iniciales de las variables: $t = 0; A = a$ Donde a representa cantidad inicial de C_{14}

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: CaseMode := Sensitive

#3: InputMode := Word

#4: $\frac{dA}{dt} = kA$

#5: InputMode := Character

#6: SEPARABLE(k, A, t, A, 0, a)

#7: $LN(A) - LN(a) = k \cdot t$

#8: SOLVE(LN(A) - LN(a) = k·t, A, Real)

#9: $A = a \cdot e^{k \cdot t}$

#10: $A(t) := a \cdot e^{k \cdot t}$

Para calcular el valor de la constante de decaimiento, se debe tener en cuenta la siguiente condición: $0.5a = A(5600)$ Porque, la vida media es el valor que corresponde en tiempo t, $A(t) = 0.5a$ para una cantidad inicial.

#11: $0.5 \cdot a = a \cdot e^{5600 \cdot k}$

#12: $SOLVE(0.5 \cdot a = a \cdot e^{5600 \cdot k}, k, Real)$

#13: $k = - \frac{LN(2)}{5600}$

#14: $k = -0.0001237762822$

#15: $A(t) := a \cdot e^{- 618881411 \cdot t/5000000000000}$

#16: $A(t) := a \cdot e^{- 0.0001237762821 \cdot t}$

Utilizando la condición $y = 0.001a$ que representa la milésima parte de la cantidad original de es decir el 10% de la dosis original de C_{14}

#17: $0.001 \cdot a = a \cdot e^{- 0.0001237762821 \cdot t}$

#18: $SOLVE(0.001 \cdot a = a \cdot e^{- 0.0001237762821 \cdot t}, t, Real)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

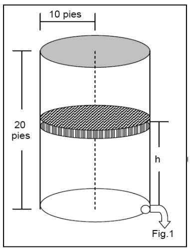
#19: $t = \frac{10000000000000 \cdot LN(10)}{412587607}$

#20: $t = 5.580839205 \cdot 10^{4}$

Aproximadamente 56000 años

EJEMPLO 8. Un cilindro recto circular de 10 pies de radio y 20 pies de altura, está lleno con agua. Tiene un pequeño orificio en el fondo de una pulgada de diámetro ¿Cuándo se vaciará todo el tanque?

Modelo: $A(h)\frac{dh}{dt} = -ac\sqrt{2gh}$ (ecuación diferencial asociada a los Vaciados de tanques)



El diámetro del orificio por donde fluye el agua fuera del tanque es de 1 pulgada, por lo tanto el radio es ½ pulgada. Como las dimensiones del tanque están dadas en pie, utilizando la equivalencia de 1 pulgada =1/12 pies y puesto que el área del orificio de salida es el área de una circunferencia $a(r) = \pi r^2$, resulta que el área "a" del orificio de salida es $a = \pi\left[\frac{1}{24}\right]^2 = \frac{\pi}{576} pie^2$ El coeficiente de descarga "c" no está dado por lo tanto se asume $c = 1$ y la gravedad es $g = 32 \frac{pies}{seg^2}$

Para determinar $A(h)$, que es el área de la sección transversal del tanque en función de la altura "h", obsérvese en la Fig. 1 que las secciones transversales del tanque son circunferencias de radio constante r = 10 pies. Por lo tanto, el área de la sección transversal es la misma, independientemente de la altura h a la cual se efectúe el corte. Así:

$$A(h) = \pi(10)^2 = 100\pi\, pie^2 \Rightarrow sust.\ en\ A(h)\frac{dh}{dt} = -ac\sqrt{2gh}$$

$$100\pi dh = -\frac{\pi}{576}\sqrt{64h}dt \Rightarrow 100\pi dh = -\frac{8\pi}{576}\sqrt{h}dt \Rightarrow 100dh = -\frac{1}{72}\sqrt{h}dt \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{h}}{7200}$$

La ecuación dada es la ecuación diferencial asociada al problema; la misma debe resolverse sujeta a la condición que para el tiempo $t_0(seg)$, la altura inicial es $h_0 = 20(pies)$, pues en el enunciado se dice que el tanque está totalmente lleno.

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: CaseMode := Sensitive

#3: InputMode := Word

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#4: $$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{h}}{7200}$$

#5: InputMode := Character

#6: $$\text{SEPARABLE\_GEN}\left(-\frac{7200}{\sqrt{h}}, 1, h, t, k\right)$$

#7: $$t = k - 14400\cdot\sqrt{h}$$

#8: $\text{SOLVE}(t = k - 14400\cdot\sqrt{h}, k, \text{Real})$

#9: $$k = 14400\cdot\sqrt{h} + t$$

SUSTITUIMOS LOS VALORES DE h= 20 y t= 0, PARA CALCULAR EL VALOR DE k

#10: $$k = 28800\cdot\sqrt{5}$$

AHORA SE SUSTITUYE ESE VALOR EN LA EXPRESIÓN #7

#11: $$t = 28800\cdot\sqrt{5} - 14400\cdot\sqrt{h}$$

Para determinar el tiempo que demora en vaciarse el tanque, es decir, el tiempo para el cual deja de haber líquido en el tanque, se debe sustituir h = 0 en la ecuación #11

AL VACIARSE EL TANQUE LA ALTURA DEL LÍQUIDO EN EL TANQUE ES CERO, h= 0

#12: $$t = 28800\cdot\sqrt{5}$$

#13: $$t = 6.439875775\cdot10^{4}$$

Ese es el tiempo aproximado del vaciado del tanque.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas