ECUACIONES DIFERENCIALES.

DEFINICIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN: Si una ecuación contiene las derivadas o las diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (E.D.).

Una **ECUACIÓN DIFERENCIAL** es una ecuación en la que interviene una función incógnita y una o varias de sus derivadas.

Si la ecuación contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente entonces la ecuación se dice que es una **ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA (E.D.O.)**

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden por lo general, son escritas en la forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Si la ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes **ECUACIÓN DIFERENCIAL EN DERIVADAS PARCIALES**.

ORDEN: Se llama orden de una ecuación diferencial al orden de la mayor derivada que aparezca en ella.

$$\overset{\text{segundo orden}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 5\left(\overset{\text{primer orden}}{\frac{dy}{dx}}\right)^3 - 4y = e^x$$

GRADO: Se llama grado de una ecuación diferencial al grado de la derivada de mayor orden que aparezca en ella.

E.D.O. LINEAL.

Una E.D. es lineal si tiene la forma: $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

Es decir, la variable dependiente y y todas sus derivadas tienen exponente uno y cada coeficiente. $+\, a_0(x); a_1(x); \ldots; a_n(x); g(x)$, depende solo de x. Si no se cumple lo anterior se dice que la E.D. no es lineal.

Se llama **SOLUCIÓN GENERAL** de una ecuación diferencial a toda relación entre las variables, libres de derivadas, que satisface dicha ecuación diferencial.

Por lo común, la solución general de una ecuación diferencial de orden n tiene n constante. Integrar o resolver una ecuación diferencial es hallar su solución general.

Se llama **SOLUCIÓN PARTICULAR** de una ecuación diferencial a aquella solución que se obtiene a partir de la solución general, dando valores a las constantes.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria $f(x, y, y', y'', \ldots) = 0$

Diremos que una función $y=f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial si la ecuación se satisface al sustituir en ella *y*, y sus derivadas por $f(x)$ y sus derivadas respectivas.

EJEMPLO 1. Compruebe que la función $y=e^{-\frac{x}{2}}$ es una solución de la ecuación diferencial $2y'+y=0$

#1: $F(x) := e^{-x/2}$

#2: InputMode := Word

#3: $2\cdot\frac{dy}{dx} + y = 0$

AHORA SUSTITUYO EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DADA

#4: $\frac{d}{dx} e^{-x/2}$

#5: $-\frac{e^{-x/2}}{2}$

#6: $2\cdot\left(-\frac{e^{-x/2}}{2}\right) + e^{-x/2} = 0$

#7: $0 = 0$

En forma directa: **2∂(e^(- x/2), x)+ e^(- x/2) = 0**

#8: $2\cdot\frac{d}{dx} e^{-x/2} + e^{-x/2} = 0$

#9: $0 = 0$

EJEMPLO 2. Compruebe que la expresión $-2x^2y+y^2=1$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $2xydx+\left(x^2-y\right)dy=0$. Encuentre al menos una solución explícita $y=\phi(x)$

NOTA: El comando que nos da directamente el valor de y' es: **IMP_DIF(f(x,y), x, y, n),** dicho comando determina la derivada de orden n de la función implícita que se deduce de la relación $f(x,y)=0$, donde x es la variable independiente e y es la dependiente. En muchos casos el resultado depende de x y de y, más que de x o de y por separado. Esto es aceptable para algunas aplicaciones pero, si no es así, se puede intentar usar la ecuación original u=0 para eliminar y ó x de la derivada.
También se puede sustituir un valor particular de x o de y en u, para luego despejar para las otras variables (exacta o numéricamente).

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Nota: El orden de las variables es importante. Tal y como está escrito, Derive derivará la función sabiendo que *y* depende de *x* y a continuación despejará *y'*.

#10: $(2\cdot xy)\cdot dx + (x^2 - y)\cdot dy = 0$

#11: $2\cdot xy + (x^2 - y)\cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$

#12: $- 2\cdot x^2\cdot y + y^2 = 1$

SE APLICA EL COMANDO PARA DERIVAR IMPLICITAMENTE

#13: IMP_DIF$(- 2\cdot x^2\cdot y + y^2 - 1, x, y)$

#14: $\dfrac{2\cdot x\cdot y}{y - x^2}$

SE SUSTITUYE EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

#15: $2\cdot xy + (x^2 - y)\cdot \dfrac{2\cdot xy}{y - x^2} = 0$

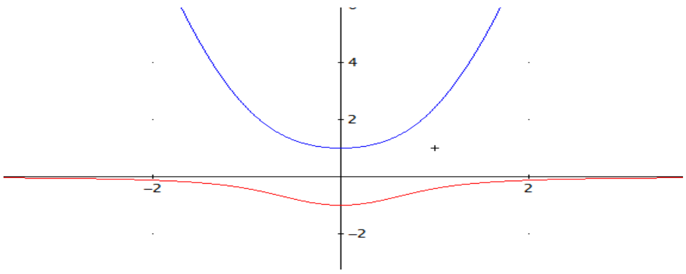
#16: $0 = 0$

Para obtener una solución explícita, se resuelve la ecuación implícita para determinar y

#17: SOLVE$(- 2\cdot x^2\cdot y + y^2 - 1 = 0, y, \text{Real})$

#18: $y = x^2 - \sqrt{(x^4 + 1)} \vee y = \sqrt{(x^4 + 1)} + x^2$

Ambas soluciones se definen en $(-\infty,\infty)$.



En resumen, Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas, denominadas **CURVAS SOLUCIÓN**, una para cada valor concreto asignado a la constante arbitraria.

PROBLEMAS CON VALORES INICIALES.

Una E.D. acompañada de unas condiciones iniciales se le llama un problema de valor inicial (P.V.I.). Con frecuencia es importante saber si un problema de valor inicial tiene solución y también deseamos saber si esta solución es única, aunque no podamos conseguir explícitamente la solución.

Con frecuencia, resolver un problema con valores iniciales de n-ésimo orden implica determinar primero una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial dada y después usando las n condiciones iniciales en x_0 determinar los valores numéricos de las ***n*** constantes en la familia. La solución particular resultante está definida en algún intervalo **Z** que contiene al punto inicial x_0

En la práctica, la determinación de las constantes que aparecen en la solución general se realiza a partir de las **condiciones iníciales** del problema. Las condiciones iníciales del problema son los valores que adquiere la función solución o sus derivadas en determinados puntos. Por ejemplo, para una ecuación diferencial de primer orden $F'(x,y)$, una condición inicial se expresaría en la forma $y(x_0)=y_0$, En consecuencia, $y=f(x)$ es solución si $f'(x)=F(x,f(x))$ para todo valor de *x* en cierto intervalo, $f(x_0)=y_0$

EJEMPLO 3. Sabemos que $x=c_1\cos(4t)+c_2 sen(4t)$ es una familia de soluciones de la ecuación diferencial: $x''+16x=0$ Determine la solución del problema con valores iniciales. $x''+16x=0,\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2,\ x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

#1: $x(t) := c_1 \cdot COS(4\cdot t) + c_2 \cdot SIN(4\cdot t)$

#2: $2 = c_1 \cdot COS(4\cdot t) + c_2 \cdot SIN(4\cdot t)$

#3: $2 = c_1$

#4: $\dfrac{d}{dt}(c_1 \cdot COS(4\cdot t) + c_2 \cdot SIN(4\cdot t))$

#5: $4\cdot c_2 \cdot COS(4\cdot t) - 4\cdot c_1 \cdot SIN(4\cdot t)$

#6: $1 = 4\cdot c_2 \cdot COS(4\cdot t) - 4\cdot c_1 \cdot SIN(4\cdot t)$

#7: $1 = 4\cdot c_2$

#8: $SOLVE(1 = 4\cdot c_2, c)$

#9: $c_2 = \dfrac{1}{4}$

#10: $x(t) := 2\cdot COS(4\cdot t) + \dfrac{1}{4}\cdot SIN(4\cdot t)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO) DE PRIMER ORDEN CON DERIVE

Derive incorpora los métodos de resolución de **EDO (ODE en inglés)** por medio del fichero de utilidades: **FIRSTORDERODES** (EDO de primer orden) y **SECONDORDERODES** (EDO de segundo orden).

Para cargar el fichero de utilidades para EDO de primer orden, se procede: **ARCHIVO – LEER – UTILIDAD - FIRSTORDERODES** y habilitará todos los comandos extras del fichero.

Debe aparecer ésta información (depende de donde esté grabado es programa)

```
#1:   LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)
```

Para resolver Suponiendo que $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es una EDO en las variables *x* e *y* el comando **DSOLVE1_GEN(*M*(x, y), N(x, y), x, y, K)** devuelve la solución general de la ecuación usando la constante simbólica *K*. Nótese que la mayoría de las ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden escribir de esa forma.

EJEMPLO 4. Obtenga la solución general de la EDO $2xy+(1+x^2)y'=0$ utilizando como constante de integración *k*, represente gráficamente la solución para $0\le k\le 5$ en intervalo de 0, 5

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $2\cdot xy+(1+x^2)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

#4: $(2\cdot xy)\cdot dx+(1+x^2)\cdot dy=0$

Ahora se identifica quien es $M(x,y)$ y quien es $N(x,y)$ para aplicar el comando respectivo, además y es de cuidado hay que volver a colocar en ajuste de modo, introducción y en modo: caracteres, para que pueda dar el resultado adecuado.

DSOLVE1_GEN(*M*(x, y*), N(*x, y*), x, y*, K)

#5: InputMode := Character

#6: $\text{DSOLVE1\_GEN}(2\cdot x\cdot y,\ 1+x^2,\ x,\ y,\ k)$

#7: $x^2\cdot y+y=k$

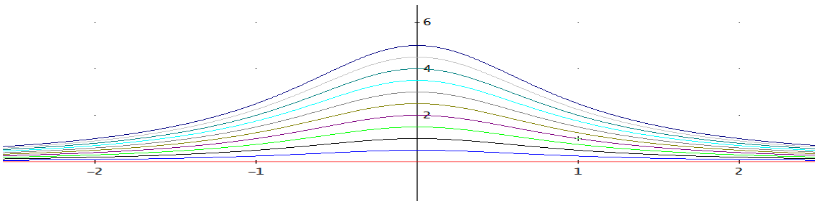
Para graficar la solución para $0\le k\le 5k$ en intervalo de 0, 5. Se aplica el comando:

VECTOR(x^2·y + y = k, k, 0, 5, 0.5)

#8: $\text{VECTOR}(x^2\cdot y+y=k,\ k,\ 0,\ 5,\ 0.5)$

#9: $\left[x^2\cdot y+y=0,\ x^2\cdot y+y=\frac{1}{2},\ x^2\cdot y+y=1,\ x^2\cdot y+y=\frac{3}{2},\ x^2\cdot y+y=2,\ x^2\cdot y+y=\frac{5}{2},\ x^2\cdot y+y=3,\ x^2\cdot y+y=\frac{7}{2},\ x^2\cdot y+y=4,\ x^2\cdot y+y=\frac{9}{2},\ x^2\cdot y+y=5\right]$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas



EJEMPLO 5. Obtenga la solución general de la EDO $(x^2+4)y'+3xy=6x$ utilizando como constante de integración *k*, represente gráficamente la solución para $0 \le k \le 3$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 – Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $(x^2+4)\cdot\dfrac{dy}{dx}+3\cdot xy=6\cdot x$

#4: $(3\cdot xy-6\cdot x)\cdot dx+(x^2+4)\cdot dy=0$

Ahora se identifica quien es $M(x,y)$ y quien es $N(x,y)$ para aplicar el comando respectivo. **DSOLVE1_GEN(3·xy - 6·x,x^2 + 4,x,y,k)**

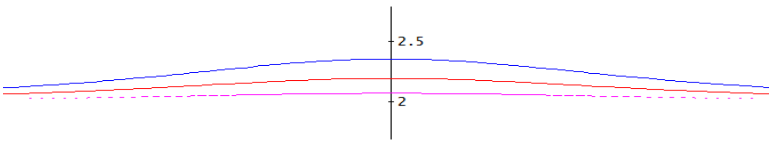
#5: InputMode := Character

#6: $\text{DSOLVE1\_GEN}(3\cdot x\cdot y-6\cdot x,\ x^2+4,\ x,\ y,\ k)$

#7: $$\frac{3\cdot x^2\cdot(y-2)^{2/3}}{2}+6\cdot(y-2)^{2/3}=k$$

#8: $$\text{VECTOR}\left(\frac{3\cdot x^2\cdot(y-2)^{2/3}}{2}+6\cdot(y-2)^{2/3}=k,\ k,\ 0,\ 3\right)$$

#9: $$\left[\frac{3\cdot x^2\cdot(y-2)^{2/3}}{2}+6\cdot(y-2)^{2/3}=0,\ \frac{3\cdot x^2\cdot(y-2)^{2/3}}{2}+6\cdot(y-2)^{2/3}=1,\ \frac{3\cdot x^2\cdot(y-2)^{2/3}}{2}+6\cdot(y-2)^{2/3}=2,\ \frac{3\cdot x^2\cdot(y-2)^{2/3}}{2}+6\cdot(y-2)^{2/3}=3\right]$$



EJEMPLO 6. Obtenga la solución general de la EDO $y'=-e^x$ utilizando como constante de integración *k*, represente gráficamente la solución para $0 \le k \le 5$ en intervalo de 0, 5.

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 – Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $\dfrac{dy}{dx}=-e^x$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#4: $e^{x}\cdot dx + dy = 0$

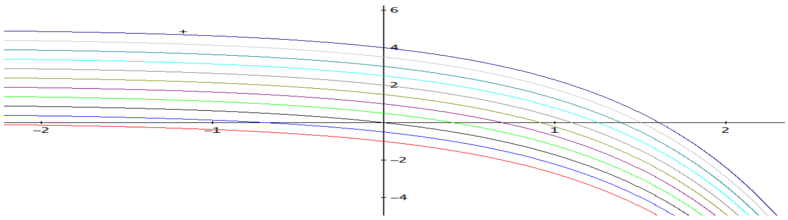
#5: InputMode := Character

#6: DSOLVE1_GEN(e^{x}, 1, x, y, k)

#7: $e^{x} + y = k$

#8: VECTOR($e^{x} + y = k$, k, 0, 5, 0.5)

#9: $\left[e^{x} + y = 0, e^{x} + y = \frac{1}{2}, e^{x} + y = 1, e^{x} + y = \frac{3}{2}, e^{x} + y = 2, e^{x} + y = \frac{5}{2}, e^{x} + y = 3, e^{x} + y = \frac{7}{2}, e^{x} + y = 4, e^{x} + y = \frac{9}{2}, e^{x} + y = 5\right]$



El comando **DSOLVE1(M(x, y), N(x, y), x, y, x₀, y₀)** se utiliza para determinar una solución particular de la ecuación diferencial, con las condiciones iniciales $x = x_0, y = y_0$ Estas condiciones iníciales, pueden ser números, variable o expresiones generales.

EJEMPLO 7. Obtenga la solución particular de la EDO $2xy + (1+x^2)y' = 0$ para las condiciones iniciales $x_0 = 0, y_0 = 1$.

En este ejemplo, se dan condiciones iníciales: $x_0 = 0, y_0 = 1$ se utiliza el comando anterior: **DSOLVE1(2xy,(1+x^2),X,Y,0,1)**

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 – Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $2\cdot xy + (1 + x^2)\cdot\frac{dy}{dx} = 0$

#4: InputMode := Character

#5: DSOLVE1($2\cdot x\cdot y$, $1 + x^2$, x, y, 0, 1)

#6: $x^2\cdot y + y = 1$

DSOLVE1_GEN puede resolver ecuaciones diferenciales de los siguientes métodos: **VARIABLES SEPARABLES, HOMOGÉNEAS, EXACTAS, LINEALES Y ALGUNOS OTROS TIPOS DE EDO**. Si la ecuación no es de ninguno de los tipos anteriores, DSOLVE1_GEN devuelve

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

la palabra "**INAPPLICABLE**". Observe que como es habitual la solución de una EDO posiblemente venga dada en forma implícita.

EJEMPLO 8. Obtenga la solución general de la EDO $y' = y^2 - 2xy + 1$ utilizando como constante de integración *k*.

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2\cdot xy + 1$

REALIZANDO ALGUNAS OPERACIONES BÁSICAS SE TRANSFORMA LA EDO EN:

#4: $(y^2 + 2\cdot xy - 1)\cdot dx + dy = 0$

#5: InputMode := Character

#6: DSOLVE1_GEN($y^2 + 2\cdot x\cdot y - 1$, 1, x, y, k)

#7: inapplicable

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas