ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES.

Una ecuación diferencial de primer orden $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ se dice que es **separable** si puede escribirse en la forma $M(x)dx+N(y)dy=0$, donde *M*(*x*) es una función continua que sólo depende de *x* y *N*(*y*) es una función continua que sólo depende de *y*.
Para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza el procedimiento de **separación de variables**, que consiste en situar todos los términos que contienen *x* a la izquierda (o la derecha) del signo de igualdad, y todos los términos que contienen *y* en el lado contrario.

A continuación se integran ambos miembros de la igualdad, cada uno respecto de la variable correspondiente. En consecuencia, la solución viene dada por
$\int M(x)dx+\int N(y)dy=k$

En forma general, una ecuación diferencial de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx}=M(x)N(y)$ se dice que es separable o que tiene variables separables.

Para resolver ecuaciones diferenciales de este tipo en DERIVE, se utiliza el comando: **SEPARABLE_GEN(*M*(*x*),*N*(*y*),*x*,*y*,*k*)** este devuelve la solución general de la ecuación usando la constante simbólica *k*, donde la expresión $M(x)$ no contiene la variable "y", ni la expresión $N(y)$ contiene a la variable "x".
Ahora si queremos obtener una solución particular de la ecuación diferencial para las condiciones iníciales $x=x_0;\ y=y_0$ se utiliza el comando: **SEPARABLE (M(x),N(y), x,y, x_0, y_0)**

EJEMPLO 1. a) Encuentre la solución general de $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+1}{2-y}$ b) determine la solución particular para la cual $y=4$ cuando $x=-3$. (Grafique ambas partes)

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+1}{2-y}$

#4: $(x^2+1)\cdot dx+(2-y)\cdot dy=0$

#5: InputMode := Character

#6: SEPARABLE_GEN(p, q, x, y, c) := ∫ q dy = ∫ p dx + k

#7: SEPARABLE_GEN(x^2 + 1, 2 - y, x, y, k)

#8: $\frac{y^2}{2}-2\cdot y=-\frac{x^3+3\cdot x+3\cdot k}{3}$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

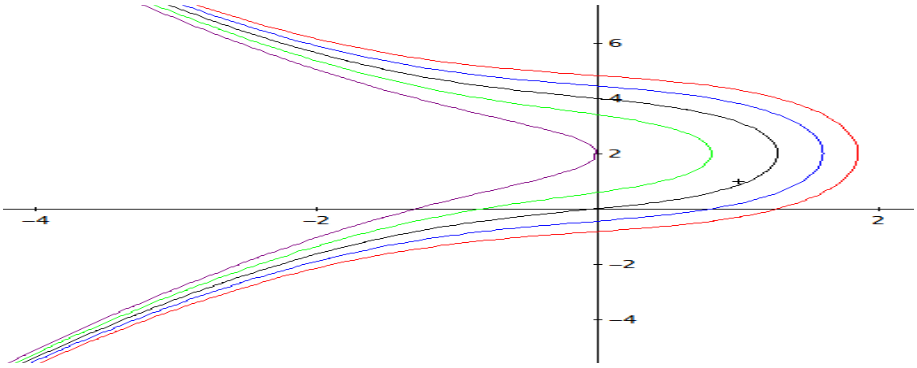
Se despeja la constante k

#9: $$\text{SOLVE}\left(\frac{y^2}{2} - 2\cdot y = -\frac{x^3 + 3\cdot x + 3\cdot k}{3}, k, \text{Real}\right)$$

#10: $$k = -\frac{2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y}{6}$$

#11: $$\text{VECTOR}\left(k = -\frac{2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y}{6}, k, -2, 2\right)$$

#12: $$[2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = 12, 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = 6, 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = 0, 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -6, 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -12]$$



NOTA: La expresión # 6 y # 14 fue redefinida por el autor, para utilizar la forma $M(x)dx + N(y)dy = 0$, Se ha identificado $p = M(x); q = N(y)$

Parte b)

#14: $$\text{SEPARABLE}(p, q, x, y, x0, y0) := \int_{y0}^{y} q\, dy = \int_{x0}^{x} p\, dx$$

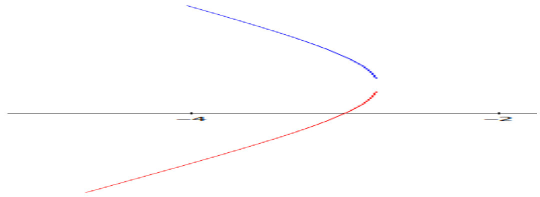
#15: $$\text{SEPARABLE}(x^2 + 1, 2 - y, x, y, -3, 4)$$

#16: $$\frac{y^2}{2} - 2\cdot y = -\frac{x^3 + 3\cdot x + 36}{3}$$

#17: $$\text{SOLVE}\left(\frac{y^2}{2} - 2\cdot y = -\frac{x^3 + 3\cdot x + 36}{3}, y, \text{Real}\right)$$

#18: $$y = \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{6} - \sqrt{(-x^3 - 3\cdot x - 30)})}{3} \lor y = \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{(-x^3 - 3\cdot x - 30)} + \sqrt{6})}{3}$$

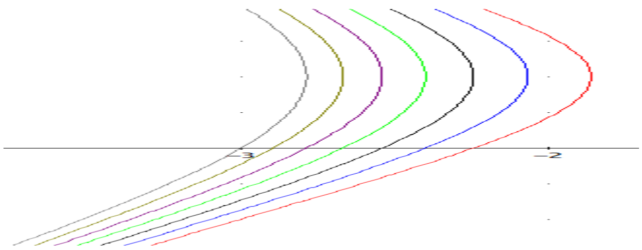
Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas



Si se quiere visualizar en las soluciones generales esa solución particular, cambiamos los valores de la constante.

$$\#19:\quad \text{VECTOR}\left(k = -\frac{2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y}{6},\ k,\ 6,\ 12\right)$$

$$\#20:\quad \left[2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -36,\ 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -42,\ 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -48,\ 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -54,\ 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -60,\ 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -66,\ 2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y = -72\right]$$



Ahora para aplicar el comando predeterminado **FIRSTORDERODES** de las utilidades se debe colocar la ecuación diferencial de este modo: $\frac{dy}{dx} = M(x)N(y)$

```
#1:   LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)
#2:   InputMode := Word
```

$$\#3:\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{2 - y}$$

$$\#4:\quad \text{SEPARABLE\_GEN}\left(x^2 + 1,\ \frac{1}{2 - y},\ x,\ y,\ k\right)$$

$$\#5:\quad \frac{y^2}{2} - 2\cdot y = -\frac{x^3 + 3\cdot x + 3\cdot k}{3}$$

$$\#6:\quad \text{SOLVE}\left(\frac{y^2}{2} - 2\cdot y = -\frac{x^3 + 3\cdot x + 3\cdot k}{3},\ k,\ \text{Real}\right)$$

$$\#7:\quad k = -\frac{2\cdot x^3 + 6\cdot x + 3\cdot y^2 - 12\cdot y}{6}$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#8: $\text{SEPARABLE}\left(x^2 + 1, \dfrac{1}{2 - y}, x, y, -3, 4\right)$

#9: $$y\cdot(y - 4) = -\frac{2\cdot(x^3 + 3\cdot x + 36)}{3}$$

EJEMPLO 2. Obtener la solución general de la ecuación diferencial $y' = e^{(3x+2y)}$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $\dfrac{dy}{dx} = e^{3\cdot x + 2\cdot y}$

#4: $\dfrac{dy}{dx} = e^{3\cdot x}\cdot e^{2\cdot y}$

#5: InputMode := Character

#6: $\text{SEPARABLE\_GEN}(e^{3\cdot x}, e^{2\cdot y}, x, y, k)$

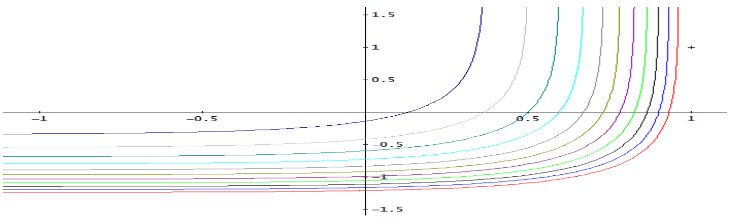
#7: $$e^{-2\cdot y} = -\frac{2\cdot e^{3\cdot x}}{3} - 2\cdot k$$

#8: $\text{SOLVE}\left(e^{-2\cdot y} = -\dfrac{2\cdot e^{3\cdot x}}{3} - 2\cdot k, k, \text{Real}\right)$

#9: $$k = -\frac{e^{3\cdot x}}{3} - \frac{e^{-2\cdot y}}{2}$$

#10: $\text{VECTOR}\left(k = -\dfrac{e^{3\cdot x}}{3} - \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2}, k, -6, -1, 0.5\right)$

#11: $\left[\dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = 6, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = \dfrac{11}{2}, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = 5, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = \dfrac{9}{2}, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = 4, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = \dfrac{7}{2}, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = 3, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = \dfrac{5}{2}, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = 2, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = \dfrac{3}{2}, \dfrac{e^{3\cdot x}}{3} + \dfrac{e^{-2\cdot y}}{2} = 1\right]$



Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

EJEMPLO 3. Obtener una solución particular de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = e^{(x+y)} + e^{y}$ que pase por el punto $p(0,1)$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $\frac{dy}{dx} = e^{x + y} + e^{y}$

#4: $\frac{dy}{dx} = (e^{x} + 1)\cdot e^{y}$

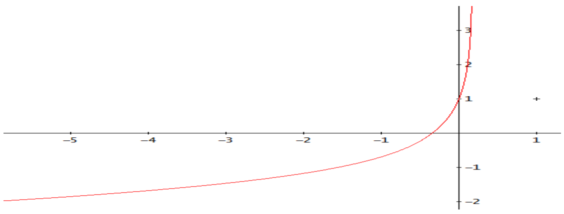
#5: InputMode := Character

#6: $\mathrm{SEPARABLE}(e^{x} + 1,\ e^{y},\ x,\ y,\ 0,\ 1)$

#7: $e^{-y} = - e^{x} - e^{-1}\cdot(e\cdot x - e - 1)$

#8: $\mathrm{SOLVE}(e^{-y} = - e^{x} - e^{-1}\cdot(e\cdot x - e - 1),\ y,\ \mathrm{Real})$

#9: $y = 1 - \mathrm{LN}(- e^{x + 1} - e\cdot x + e + 1)$



EJEMPLO 4. Resolver la ecuación diferencial $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ con la condición $y(2) = 0$

#1: LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6 - Evaluación\Math\FirstOrderODEs.mth)

#2: InputMode := Word

#3: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x + 2)}}$

#4: InputMode := Character

#5: $\mathrm{SEPARABLE}\left(\frac{1}{\sqrt{(x + 2)}},\ 1,\ x,\ y,\ 2,\ 0\right)$

#6: $y = 2\cdot\sqrt{(x + 2)} - 4$