REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN 3 DIMENSIONES

Un vector con tres coordenadas puede representar un punto, una curva en el espacio o una superficie paramétrica. Los tres elementos del vector respectivamente dan las coordenadas x, y, z del punto, curva o superficie. Si las coordenadas son constantes, el vector coordenado representa un punto, si las coordenadas depende de un parámetro, el vector representa una curva en el espacio. Si las coordenadas dependen de dos parámetros, el vector representa una superficie paramétrica.

La gráfica de funciones de dos variables se interpreta como superficies en el espacio tridimensional.

Utilizaremos estos **comandos** para representar gráficas en 3- dimensiones.

AUTHOR permite escribir expresiones matemáticas nuevas, para su posterior calculo.

PLOT permite acceder a una de las pantallas gráficas de DERIVE.

CENTER fija el centro de coordenadas. Puede hacerse manual o automáticamente, dependiendo de la gráfica y de los conocimientos que se tienen de ella.

EYES asigna valores a los distintos ejes.

FOCAL fija el punto de observación de la gráfica

GRIDS calcula una retícula donde se va asentar la gráfica. Sirve para apreciar una mayor resolución de la imagen.

LENGTH asigna un volumen a la caja donde se va a encerrar la gráfica.

OPTIONS contiene a su vez otros muchos subcomandos como pueden ser **AXES, COLOR, DISPLAY, EXECUTE, ZOOM,** etc.

BARRA DE HERRAMIENTAS

Análogamente a la barra de herramientas de la ventana Gráficas: 2D, esta barra contiene los iconos de las acciones más usuales en el entorno grafico 3D: dibujar la expresión marcada en la ventana de álgebra, borrar la gráfica, insertar una anotación, establecer el punto de vista, restablecer la escala por defecto, los cambios automáticos (zoom), podemos rotar o girar la gráfica e ir modificando a la vez el punto de vista (izquierda, derecha, arriba, abajo), cada icono al señalarlo de la función que cumple.

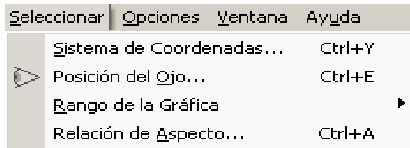
Nueva hoja	Insertar Anotación	Girar hacia la izquierda
Abrir	Trazar las Gráficas	Girar hacia la derecha
Guardar la hoja	Ajuste del Mínimo/máximo	Rotar hacia arriba
Imprimir	Fijar la posición del ojo	Rotar hacia abajo
Copiar la Ventana Gráfica	Zoom hacia fuera	Magnificar
Borrar la gráfica	Zoom hacia dentro	Contraer
Representar	Rotar las gráficas	Activar la Ventana de Álgebra

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

COMANDOS DE LÍNEAS DE MENÚ

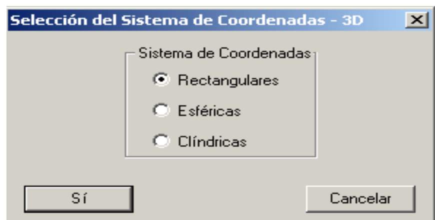
Entre los más importantes se encuentran:

Menú: Seleccionar Este menú abre distintos cuadros de dialogo donde podemos modificar o establecer: el sistema de coordenadas a utilizar, el punto de vista del observador, la escala y rango de la gráfica así como la relación entre las escalas de los ejes.

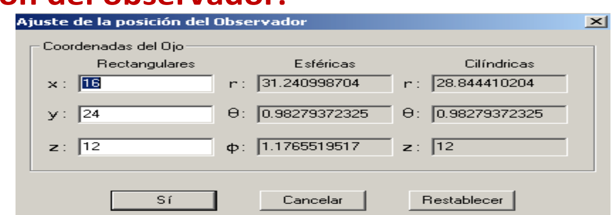


Donde pueden observar los submenúes de sistemas de coordenadas, posición del ojo, rango de la gráfica, relación de aspecto

Sistemas de coordenadas:

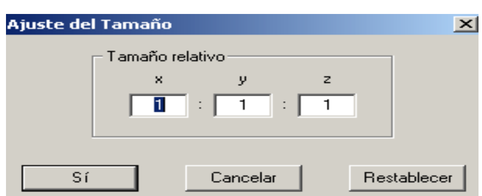


Ajuste de la posición del observador:



Rango de la gráfica

Ajuste de tamaño

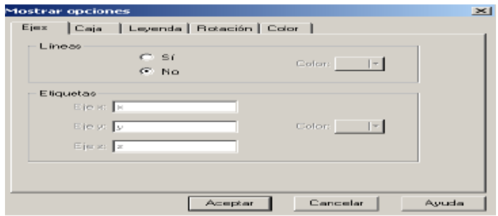


Menú: Opciones permite modificar los ejes y sus etiquetas, la representación

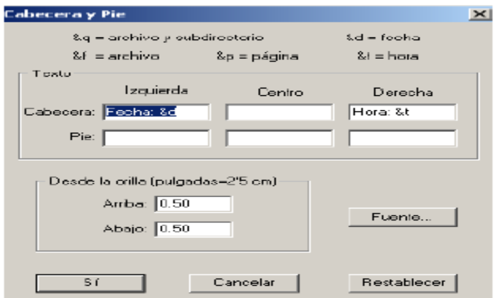
Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

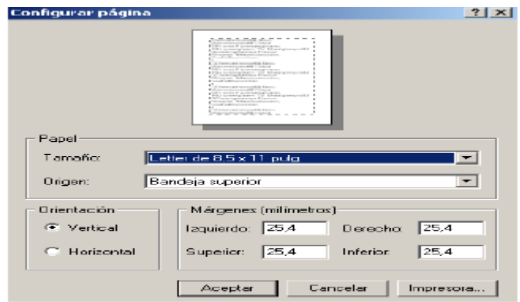
de la superficie dentro de una caja, la leyenda y su posición, el incremento de rotación de los ejes, así como el color de las gráficas y fondo.

Pantalla:



Impresión:

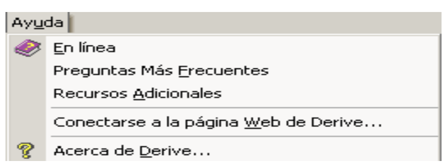




Línea de estado

Cuando la ventana de Graficas-3D está activa la línea de estado nos informa del sistema de coordenadas que estamos utilizando en el trazado de las gráficas, la posición del punto de vista del observador, el centro de la ventana y la escala de las gráficas.

Ayuda:



GRAFICA DE UN VECTOR

Ejemplo. Graficar el vector dado. $\vec{A} = \langle 2, -1, 3 \rangle$

Procedimiento:

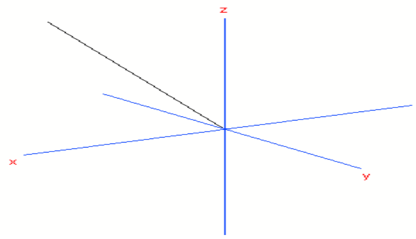
a) Se coloca la función en el editor de expresiones: [0,0,0; 2,-1,3] Se pulsa **Introducir Expresión** o la tecla [**Intro**] y la fórmula pasa a la ventana **Álgebra.**

$$\#1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Una vez seleccionada, se activa el comando insertar, se selecciona gráfica 3D, luego active la gráfica 3D, seleccione gráfica y por último coloque los parámetros, el color de la gráfica y siguiente.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

c) Cuando obtenga la gráfica buscada, siga este proceso: ARCHIVO, INCRUSTAR, luego VENTANA, ALGEBRA 1, para volver a la página de trabajo. (Ver resultado)



REPRESENTAR PUNTOS, SEGMENTOS, TRIÁNGULOS... EN 3D

Para dibujar un punto se introduce una matriz de una fila y tres columnas. Para dibujar un segmento se introduce una matriz de dos filas y tres columnas y para dibujar un triángulo..., hay que dibujar cada uno de los segmentos que lo componen.

REPRESENTAR RECTAS EN 3D

Para representar una recta, se pasa a forma paramétrica y se introducen sus coordenadas como si fuesen un vector: $[a_1 + v^1t, a_2 + v_2t, a_3 + v_3t]$.

Ejemplo: Determine el segmento dirigido $\overline{PQ}$, donde P es el punto $(1,3,6)$.y Q es el punto $(2,-1,4)$. Grafique el vector resultante:

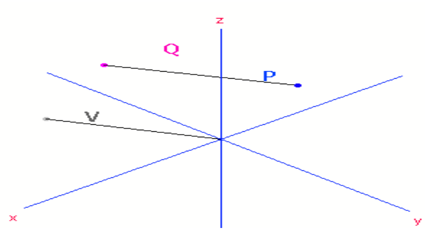
```
#2:   [P := [1, 3, 5], Q := [2, -1, 4]]

#3:   V := Q - P

#4:                                   V := [1, -4, -1]
```

$$\#5: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\#6: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$



Nota: La recta **L** que pasa por los puntos P Y Q es paralela al vector $\vec{V}$ (ver gráfica anterior)

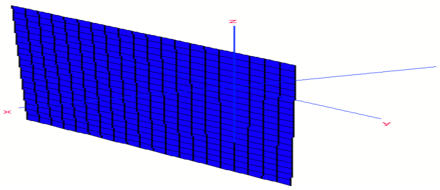
GRAFICA DE PLANOS

Así como una recta está determinada por dos puntos distintos, un plano está determinado por tres puntos no colineales.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

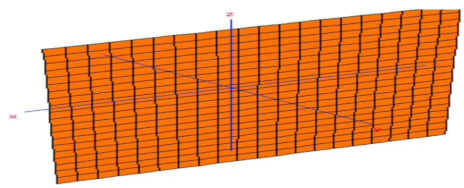
Plano perpendicular al eje OX. Corresponde a un plano paralelo al plano YOZ.
Ejemplo: Grafique: $x = 2$
Se copia la expresión en la barra de expresiones y se sigue el procedimiento anterior:

#7:   x = 2



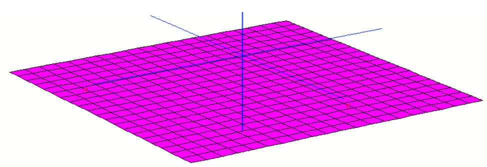
Plano perpendicular al eje OY. Corresponde a un plano paralelo al plano XZ.
Ejemplo. Grafique $y = 1$

#8:   y = 1



Plano perpendicular al eje OZ. Corresponde a un plano paralelo al plano XY
Ejemplo. Grafique $z = -2$

#9:   z = -2



GRAFICAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Para definir funciones de dos o más variables se utiliza desde la barra de introducir expresiones. Una vez definida la función, puede ser evaluada, derivada, integrada, graficada etc...

Ejemplo: Definir la siguiente función: $f(x, y) = y \ln x$

Introducimos el nombre y las variables de la función dada, es decir f(x, y), Nos aparece en pantalla la siguiente expresión:

#10:   f(x, y) := y·LN(x)

Para evaluar la función anterior en el punto (2,4), en la barra de introducir expresiones borramos la función y solo dejamos en ella f(x, y), luego, sustituimos los valores indicados y por último activamos el icono 

#11:   f(2, 4)

#12:   2.772588722

Otra posibilidad que eventualmente puede ser útil es la adecuada utilización de **SIMPLIFICAR, SUSTITUIR VARIABLES**, pero con ella debemos ir seleccionando una a una cada variable para introducir su valor y no pulsar OK o simplificar, hasta no haber realizado todos los cambios deseados.

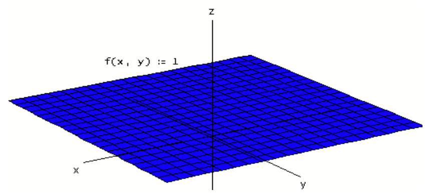
Nota: No es recomendable asignar valores a las variables independientes x, y utilizando**:=**

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

para evaluar una función ya que los valores asignados permanecerán hasta que se le asignen otros valores diferentes. (No confundir sustituir con asignar). Si se desea que vuelvan a designar variables independientes se tendrá que redefinirlas con x:= x (enter) y:=y (enter).

Ejemplo 1: Analice la siguiente función constante $f(x,y)=1$

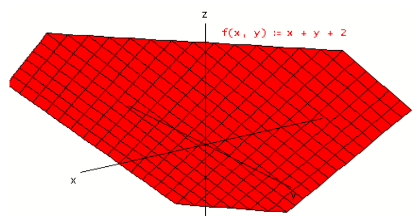
Procedimiento para graficar es similar a lo anteriormente descrito. #13: f(x, y) := 1



La gráfica obtenida es el plano horizontal $z=1\ en\Re$

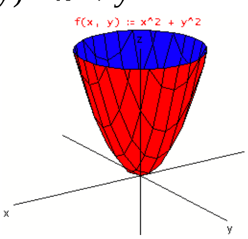
Ejemplo 2. Analice la función $f(x,y)=x+y+2$

#14: f(x, y) := x + y + 2



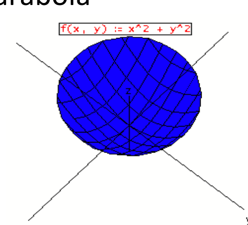
Tiene como gráfica el plano inclinado $z=x+y+2$ Este plano interseca el plano $xy(z=0)$ En la línea $y=-x-2$ y al eje **z** en el punto $(0,0,2)$

Ejemplo 3: Analice la función: $f(x,y)=x^2+y^2$ #15: f(x, y) := x^2 + y^2



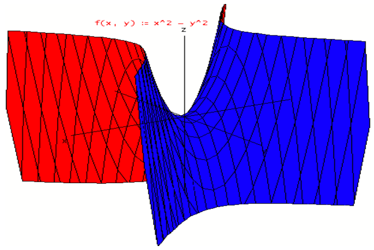
La función cuadrática $f(x,y)=x^2+y^2$ tiene como gráfica un paraboloide de revolución orientado hacia arriba desde el origen y alrededor del eje z.

Si rotamos hacia abajo podemos observar una circunferencia de radio **a** con centro en el origen, que indica un aspecto de parábola

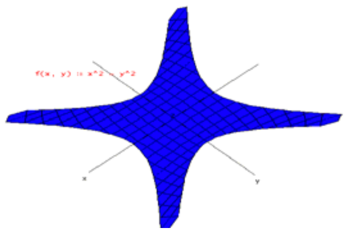


Ejemplo 4: Analice la función: $f(x,y)=x^2-y^2$ #16: f(x, y) := x^2 − y^2

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas



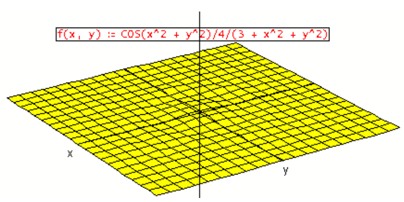
La función cuadrática $f(x,y)=x^2-y^2$ tiene como gráfica una superficie llamada **PARABOLOIDE HIPERBÓLICO** o silla de montar, centrada en el origen. Como no es fácil imaginar la gráfica de $f(x,y)$ a partir solo de estos datos, calculamos dos secciones. Para la sección del plano xz, tenemos que es una parábola abriéndose hacia arriba, y para el plano yz, que es una parábola abriéndose hacia abajo.



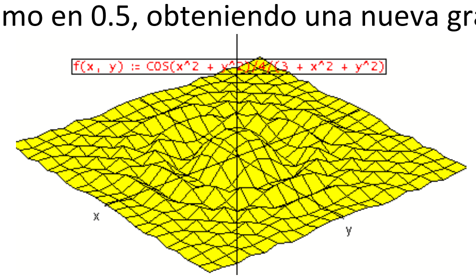
Ejemplo 5: Analizar la siguiente función: $f(x,y)=\dfrac{\cos\left[\dfrac{x^2+y^2}{4}\right]}{(3+x^2+y^2)}$

Se procede de forma similar a los casos anteriores para obtener la gráfica.

#17: $f(x, y) := \dfrac{\dfrac{\mathrm{COS}(x^2 + y^2)}{4}}{3 + x^2 + y^2}$

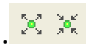


Como el recorrido de la función coseno es [-1,-1], el recorrido de nuestra función es$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ Modificamos, por tanto, la escala en la variable *z*, para obtener una mejor visión de la gráfica. Marcamos (ajuste del mínimo – máximo) y fijamos el mínimo de la variable *z* en –0.5 y el máximo en 0.5, obteniendo una nueva gráfica.



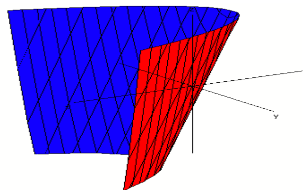
Si lo que queremos es ampliar o disminuir la visión que tenemos de la gráfica marcamos

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

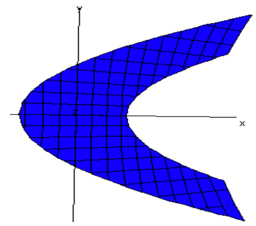
en *Seleccionar* la opción *RELACIÓN DE ASPECTO y se ajusta el tamaño deseado,* o su equivalentemente, pulsamos los botones de herramientas que nos interese. 

Ejemplo 6: Dada la función, $f(x, y) = y^2 - 3x$ Determine su gráfica y sus características.

#18: $f(x, y) := y^2 - 3 \cdot x$

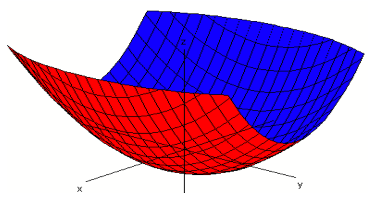


Son parábolas paralelas abiertas hacia la derecha.



Ejemplo 7: Realice la gráfica de la siguiente función $f(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1$

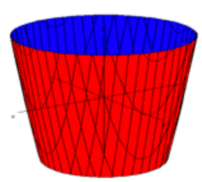
#19: $f(x, y) := \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1$



OTRAS GRÁFICAS:

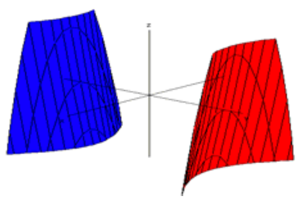
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 16$

#20: $f(x, y) := x^2 + y^2 - 16$



$f(x, y) = -x^2 + y^2 - 16$

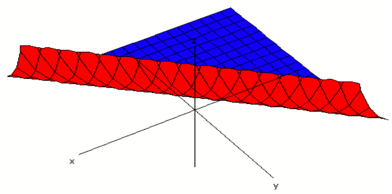
#21: $f(x, y) := - x^2 + y^2 - 16$



Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

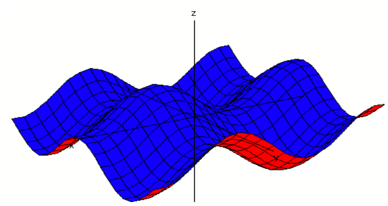
$f(x,y)=e^{x+y}$

#22: $f(x,\ y) := e^{x\ +\ y}$



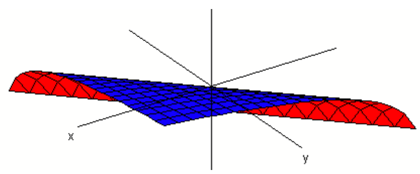
$f(x,y)=senx+\cos y$

#23: f(x, y) := SIN(x) + COS(y)



$f(x,y)=\log(x+y)$

#24: f(x, y) := LOG(x + y)



CURVAS DE NIVEL DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

Las curvas de nivel de una función son de la forma $f(x,y)=k$. Un camino para representar estas curvas sería ir dando valores a k.

En DERIVE, se utiliza la función **VECTOR** para agrupar en una misma expresión las curvas de nivel que se desee calcular.

Ejemplo si se quiere calcular las curvas de nivel de una función, cuando k va desde 1 hasta 5. Se Edita y se simplifica la expresión: $vector(f(x,y)=k,k,1,5)$

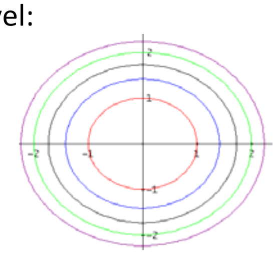
Ejemplo 8: Dada la función, $f(x,y)=x^2+y^2$ se pide construir sus curvas de nivel desde 1 hasta 5.

#25: $f(x,\ y) := x^2 + y^2$

#26: $\mathrm{VECTOR}(x^2 + y^2 = k,\ k,\ 1,\ 5)$

#27: $\left[x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 2,\ x^2 + y^2 = 3,\ x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 5\right]$

Ahora seleccionamos la expresión # 27, insertamos *Ventana 2D,* graficamos y obtenemos las gráficas de esas 5 curvas de nivel:



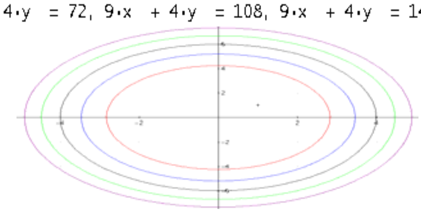
Cuando estudiamos las curvas de nivel obtenemos los conjuntos $N_c = \{(x,y): x^2 + y^2 = k\}$ que son circunferencias en el plano horizontal de centro en el origen de coordenadas y de radio $\sqrt{k}$, solo tiene sentido si $k > 0$, así que sólo hay punto de la gráfica con $z > 0$ y todos los puntos (x, y) en una de estas circunferencias están a la misma altura k

Ejemplo 9: Dada la función, $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$ se pide construir sus curvas de nivel desde 1 hasta 5.

#28: $f(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$

#29: $\text{VECTOR}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = k, k, 1, 5\right)$

#30: $[9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 72, 9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 108, 9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 144, 9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 180, 9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 216]$



Se puede observar que cuando trazamos la gráfica en el plano xy todas las trazas en los planos paralelos son elipses congruentes.

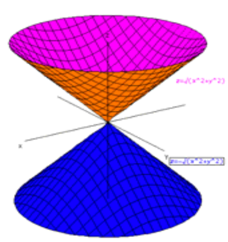
REPRESENTACIÓN DE LA SUPERFICIE CÓNICA.

Grafique la superficie dada: $x^2 + y^2 = z^2$

#31: $x^2 + y^2 = z^2$

#32: $\text{SOLVE}(x^2 + y^2 = z^2, z, \text{Real})$

#33: $z = -\sqrt{(x^2 + y^2)} \lor z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$



REPRESENTACIÓN DE UNA ESFERA $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Para representar superficies en 3D las ecuaciones deben expresarse en forma explícita

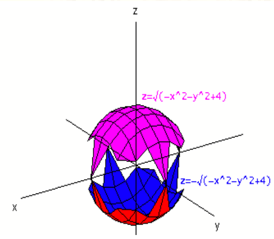
#34: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

#35: $\text{SOLVE}(x^2 + y^2 + z^2 = 4, z, \text{Real})$

#36: $z = -\sqrt{(-x^2 - y^2 + 4)} \lor z = \sqrt{(-x^2 - y^2 + 4)}$

Seleccionando los resultados y siguiendo las pautas para graficar se obtiene

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas



COORDENADAS CILÍNDRICAS.

Las **coordenadas cilíndricas** son un sistema de coordenadas para definir la posición de un punto del espacio mediante un ángulo, una distancia con respecto a un eje y una altura en la dirección del eje.

Las coordenadas cilíndricas constituyen una generalización de las coordenadas polares del plano, a base de extenderlas al espacio paralelamente a una recta (el eje z), perpendicular al plano

El sistema de coordenadas cilíndricas es muy conveniente en aquellos casos en que se tratan problemas que tienen simetría de tipo cilíndrico o *azimutal*

Un punto **p** en coordenadas cilíndricas se representa por $p(r,\theta,z)$ ó $p(\rho,\varphi,z)$ donde:

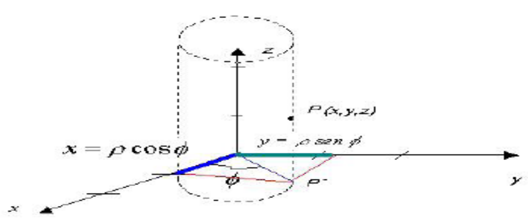
ρ : Coordenada radial, definida como la distancia del punto p al eje, o bien la longitud de la proyección del radio vector sobre el plano xy

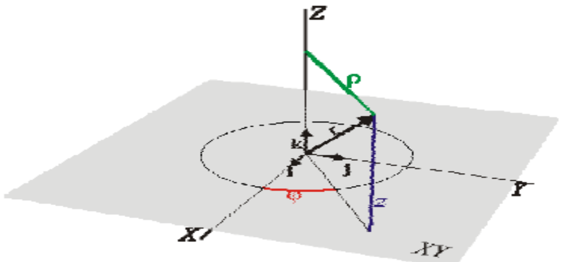
φ : Coordenada azimutal, definida como el ángulo que forma con el eje x la proyección del radio vector sobre el plano xy.

z : Coordenada vertical o altura, definida como la distancia, con signo, desde el punto P al plano xy

Los rangos de variación de las tres coordenadas son:

$0 \le \rho < \infty; 0 \le \varphi < 2\pi; -\infty < z < \infty$





La coordenada azimutal φ, se hace variar en ocasiones desde $-\pi a \pi$. La coordenada radial es siempre positiva. Si reduciendo el valor de ρ llega a alcanzarse el valor 0, a partir de ahí, ρ vuelve a aumentar, pero φ aumenta o disminuye en π radianes.

La coordenada vertical *z*, es la misma que en cartesianas, y lo mismo ocurre con su línea coordenada, que será una recta vertical que pasa por **p**

Para la coordenada radial ρ, al mover esta coordenada nos acercamos o alejamos del eje z sin variar la altitud ni la dirección. Las líneas serán entonces semirrectas horizontales que parten del eje z y pasan por **p**. Son semirrectas y no rectas, porque siempre $\rho \ge 0$

Al variar la coordenada φ cambiamos el ángulo con el eje *x*, sin modificar ni la distancia al eje ni la altura. Por tanto, las líneas coordenadas son circunferencias horizontales

SUPERFICIES COORDENADAS

1) Las superficies $z = kte$ son, como en cartesianas, planos horizontales

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

2) Las superficies $\rho = kte$ están formadas por los puntos situados a la misma distancia del eje *z*. Estos puntos forman un cilindro circular con esta recta como eje. De aquí el nombre de este sistema de coordenadas.
3) Sí fijamos φ nos movemos sobre una superficie que forma un ángulo constante con el plano xz. Esto viene a ser como una puerta girada un cierto ángulo respecto a su eje. La superficie coordenada es un semiplano vertical con borde el eje *z*.

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE UN SISTEMA A OTRO
EL SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto ***p*** del espacio se representa, como hemos indicado anteriormente por un trío ordenado $p(r,\theta,z)$ ó $p(\rho,\varphi,z)$ donde:
a) (ρ,φ) son las coordenadas polares de la proyección de p sobre el plano xy.
b) z es la distancia dirigida de **p** a (ρ,φ) .
Para pasar de rectangulares a cilíndricas, o viceversa, hay que usar las siguientes fórmulas de conversión:

CILÍNDRICAS A RECTANGULARES. $x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho sen\varphi;\ z = z$

RECTANGULARES A CILÍNDRICAS: $\rho^2 = x^2 + y^2;\ tg\varphi = \dfrac{y}{x};\ z = z$

El punto $(0,0,0)$ se llama **POLO**. Además, como la representación de un punto en polares no es única, tampoco lo es en cilíndricas.

Ejemplo 10: Expresar en coordenadas rectangulares el punto $p(\rho,\varphi,z) = (4,\frac{5\pi}{6},3)$
Con las fórmulas de conversión de cilíndricas a rectangulares obtenemos:
$x = 4\cos(\frac{5\pi}{6}) = -2\sqrt{3};\ y = 4sen(\frac{5\pi}{6}) = 2;\ z = 3 \Rightarrow p(-2\sqrt{3}.2,3)$

Ejemplo 11: Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para las superficies cuyas ecuaciones rectangulares se especifican a continuación: $x^2 + y^2 = 4z^2$
Sabemos (por lo anteriormente descrito), que la gráfica de $x^2 + y^2 = 4z^2$ es un cono de dos hojas, con su eje en el eje z. Si sustituimos, $x^2 + y^2 = \rho^2$ obtenemos su ecuación en cilíndricas. $\rho^2 = 4z^2$
Ejemplo 12. Hallar la ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie cuyas ecuación rectangular es $y^2 = x$
La superficie $y^2 = x$ es un cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z. Sustituyendo:

$$y^2 = \rho^2 sen^2\varphi; x = \rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2 sen^2\varphi = \rho\cos\varphi \Rightarrow \rho(\rho sen^2\varphi - \cos\varphi) = 0$$

$$\rho = 0;\ (\rho sen^2\varphi - \cos\varphi) = 0 \Rightarrow \rho = \frac{\cos\varphi}{sen^2\varphi} \Rightarrow \rho = ctg\varphi\csc\varphi$$

Nótese que esta ecuación incluye un punto con $\rho = 0$, así que no se ha perdido nada al dividir ambos miembros por el factor ρ.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

PUNTOS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A CARTESIANAS EN DERIVE

Para obtener las coordenadas cartesianas de un punto que viene expresado en coordenadas cilíndricas, se utiliza el siguiente comando:

#37: $\text{CYLINDER}(\rho, \psi, Z) := [\rho \cdot \text{COS}(\psi), \text{SIN}(\psi), Z]$

Ejemplo: 13 Obtenga las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas $(3,\frac{\pi}{2},5);(1,\pi,1)$

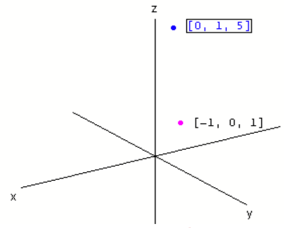
#38: $\text{CYLINDER}\left(3, \frac{\pi}{2}, 5\right)$

#39: $[0, 1, 5]$

#40: $\text{CYLINDER}(1, \pi, 1)$

#41: $[-1, 0, 1]$

Y ahora se grafica esos resultados, según el sistema de coordenadas respectivo.



PUNTOS DE COORDENADAS CARTESIANAS A CILÍNDRICAS

Para obtener las coordenadas cilíndricas de un punto que viene expresado en coordenadas cartesianas, se utiliza el siguiente comando:

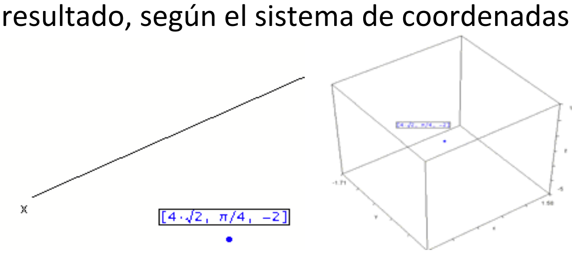
#43: $\text{CARCYL}(X, Y, Z) := \left[\sqrt{(X^2 + Y^2)}, \text{ATAN}\left(\frac{Y}{X}\right), Z\right]$

Ejemplo 14: Obtenga las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas $(4,4,-2)$

#44: $\text{CARCYL}(4, 4, -2)$

#45: $\left[4\cdot\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -2\right]$

Y ahora se grafica ese resultado, según el sistema de coordenadas respectivo (cilíndricas)



ECUACIONES DE SUPERFICIES DE COORDENADAS RECTANGULARES A COORDENADAS CILÍNDRICAS

EJEMPLO 15. Hallar la ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie cuya ecuación rectangular es: $y^2 = x$

#46: $Y^2 = X$

Ahora se sustituye las variables por sus respectivas ecuaciones y luego resolvemos:

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

$\rho^2 = x^2 + y^2;\ tg\varphi = \frac{y}{x};\ z = z \Rightarrow \rho^2 sen^2\varphi = \rho\cos\varphi$

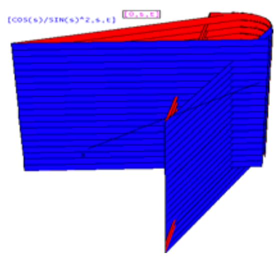
Procedimiento: SIMPLIFICAR, SUSTITUIR VARIABLES, luego se coloca el valor de cada una de ellas Y SIMPLIFICAR nuevamente.

#47: $\rho^2 \cdot \mathrm{SIN}(\psi)^2 = \rho \cdot \mathrm{COS}(\psi)$

#48: $\mathrm{SOLVE}(\rho^2 \cdot \mathrm{SIN}(\psi)^2 = \rho \cdot \mathrm{COS}(\psi),\ \rho,\ \mathrm{Real})$

#49: $\rho = \frac{\mathrm{COS}(\psi)}{\mathrm{SIN}(\psi)^2} \vee \rho = 0$

Y ahora se grafica ese resultado, se debe seleccionar el sistema de coordenadas **CILÍNDRICAS**.

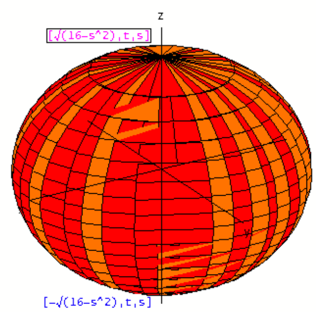


EJEMPLO 16. Hallar la ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie cuya ecuación rectangular es $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Con un procedimiento similar al anterior ejercicio obtenemos:

#50: $X^2 + Y^2 + Z^2 = 16$

#51: $Z^2 + \rho^2 = 16$



ECUACIONES DE SUPERFICIES DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A COORDENADAS RECTANGULARES

EJEMPLO 17. Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares para la superficie cuya ecuación cilíndrica es $\rho^2\cos(2\varphi) = z^3$

#54: $\rho^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \phi) = z^3$ Pero sabemos que: $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - sen^2\varphi$

$\rho^2(\cos^2(\varphi) - sen^2(\varphi)) = z^3 \Rightarrow \rho^2\cos^2(\varphi) - \rho^2 sen^2(\varphi) = z^3$

Ahora se sustituye las variables por sus respectivas ecuaciones y luego resolvemos

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#55: $\rho^2\cdot(\text{COS}(\phi)^2 - \text{SIN}(\phi)^2) = z^3$

#56: $\rho^2\cdot\text{COS}(\phi)^2 - \rho^2\cdot\text{SIN}(\phi)^2 = z^3$

#57: $(\rho\cdot\text{COS}(\phi))^2 - (\rho\cdot\text{SIN}(\phi))^2 = z^3$

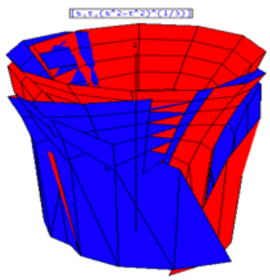
#58: $x := \rho\cdot\text{COS}(\phi)$

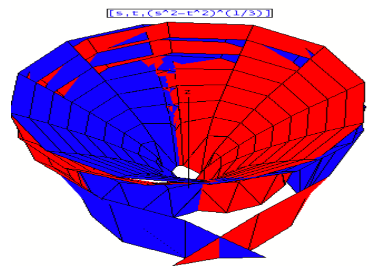
#59: $y := \rho\cdot\text{SIN}(\phi)$

#60: $x^2 - y^2 = z^3$

#61: $\text{SOLVE}(x^2 - y^2 = z^3,\ z,\ \text{Real})$

#62: $z = (x^2 - y^2)^{1/3}$





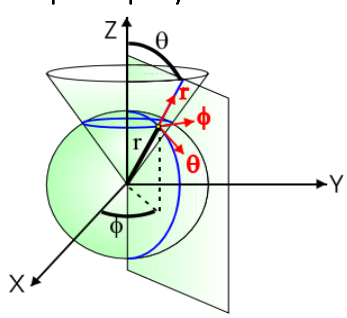
COORDENADAS ESFERICAS

Las coordenadas esféricas constituyen otra generalización de las coordenadas polares del plano, a base de girarlas alrededor de un eje. Su definición es la siguiente

La coordenada *radial* $r = \rho$ distancia al origen

La coordenada *polar* θ**:** ángulo que el vector de posición forma con el eje z. (Es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r > 0$)

La coordenada *acimutal* ϕ: ángulo que la proyección sobre el plano xy forma con el eje x



Los rangos de variación de estas coordenadas son $r = \rho \in [0,\infty); \theta \in [0,\pi]; \phi \in (-\pi,\pi]$

El ángulo ϕ también puede variar en el intervalo [0,2π).

EL SISTEMA DE COORDENADAS ESFERICAS.

El sistema de coordenadas esféricas en un punto ***p*** del espacio viene representado por un trío ordenado (ρ,θ,ϕ)

SUPERFICIES COORDENADAS:

1) La superficie $\rho = kte$ la forman los puntos situados a la misma distancia del origen de coordenadas. Esto, por definición una superficie esférica, de la cual toman nombre las coordenadas

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

2) La superficie $\phi = kte$ es, como en cilíndricas, un semiplano con borde el eje z.

3) Para construir la superficie $\phi = kte$ podemos partir de las líneas coordenadas ρ que son semirrectas que parten del origen de coordenadas y forman un ángulo fijo con el eje z. Si ahora permitimos que varíe ϕ lo que hacemos es girar estas semirrectas en torno al eje z manteniendo constante el ángulo con este eje. El resultado es una superficie cónica de semiángulo en el vértice θ

RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS RECTANGULARES Y ESFÉRICAS.

Para pasar de rectangulares a cilíndricas, o viceversa, hay que usar las siguientes fórmulas de conversión:

Esféricas a Rectangulares $x = sen\phi\cos\theta; y = sen\phi sen\theta; z = \rho\cos\phi$

Rectangulares a Esféricas: $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2; tg\theta = \dfrac{y}{x};\ \phi = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS.

Para cambiar de coordenadas esféricas a cilíndricas, o viceversa, deben aplicarse las formulas siguientes:

Esféricas a cilíndricas (r > 0): $r^2 = \rho^2 sen^2\phi;\ \theta = \theta;\ z = \rho\cos\phi$

Cilíndricas a esféricas (r> 0): $\rho^2 = r^2 + z^2;\ \theta = \theta;\ \phi = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$

Nota: Las coordenadas esféricas son especialmente apropiadas para estudiar superficies que tenga un centro de simetría.

EJEMPLO 18. Obtenga las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas esféricas dadas: $\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

$$x = 4sen(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{6}) = \sqrt{6}; y = 4sen(\tfrac{\pi}{4})sen(\tfrac{\pi}{6}) = \sqrt{2}; z = 4\cos(\tfrac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

EJEMPLO 19. Determine un conjunto de coordenadas esféricas del punto que tiene las coordenadas cartesianas indicadas: $\left(1, -1, -\sqrt{2}\right)$

Usamos las fórmulas donde $x > 0$

$$\rho = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2; \theta = arctg(\tfrac{-1}{1}) = -\tfrac{\pi}{4}; \phi = \arccos(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{3\pi}{4} \Rightarrow (2, \tfrac{-\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4})$$

EJEMPLO 20. Obtenga un conjunto de coordenadas cilíndricas del punto que tiene la coordenadas esféricas dadas $(4, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$

$$como\ r = \rho sen\phi \Rightarrow r = 4sen(\tfrac{5\pi}{6}) = 2; \theta = \tfrac{2\pi}{3}; z = 4\cos(\tfrac{5\pi}{6}) = -2\sqrt{3} \Rightarrow (2, \tfrac{2\pi}{3}, -2\sqrt{3})$$

EJEMPLO 21. Determine un conjunto de coordenadas esféricas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas indicadas: $(3, \frac{\pi}{6}, 3)$

$$\rho = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{2};\ \theta = \tfrac{\pi}{6}; \phi = \arccos(\tfrac{3}{3\sqrt{2}}) = \tfrac{\pi}{4} \Rightarrow (3\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{6} \tfrac{\pi}{4})$$

EJEMPLO 22: Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas rectangulares se indican:

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

a) cono: $x^2+y^2=z^2$ b) esfera: $-4z=0$

Parte a: Haciendo las sustituciones adecuadas para x, y, z en la ecuación dada se obtiene:

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \rho^2 sen^2(\phi)\cos^2(\theta)+\rho^2 sen^2(\phi)sen^2(\theta)=\rho^2\cos^2(\phi) \Rightarrow \rho^2(sen^2(\phi)(sen^2(\theta)+\cos^2(\theta))=\rho^2\cos^2(\phi)$$

$$\rho^2 sen^2(\phi)=\rho^2\cos^2(\phi) \Rightarrow \frac{sen^2(\phi)}{\cos^2(\phi)}=1 \Rightarrow tg^2(\phi)=1 \Rightarrow (\phi)=\frac{\pi}{4} \vee (\phi)=\frac{3\pi}{4}$$

La ecuación $(\phi)=\frac{\pi}{4}$ representa la mitad superior del cono y la ecuación $(\phi)=\frac{3\pi}{4}$ su mitad inferior.

Parte b:

$$si\ z=\rho\cos\phi \Rightarrow \rho^2=4z \Rightarrow \rho^2=4(\rho\cos\phi) \Rightarrow \rho^2-4\rho\cos\phi=0 \Rightarrow \rho(\rho-4\cos\phi)=0$$

$$\rho=0;\ \rho=4\cos\phi$$

Descartando por el momento la posibilidad de que $\rho=0$

EJEMPLO 23. Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas esféricas, $\rho=9$ identifique la superficie

Sabiendo $\rho^2=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=81$ que es una esfera.

EJEMPLO 24. Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas esféricas $\theta=\frac{\pi}{4}$ identifique la superficie

$\tan\theta=\frac{y}{x} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4}=\frac{y}{x} \Rightarrow 1=\frac{y}{x} \Rightarrow x-y=0$ es un plano a través del eje z

EJEMPLO 25. Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas esféricas, $\rho=9\sec\phi$ identifique la superficie.

La ecuación cartesiana de la superficie es $\rho=9\sec\phi=\rho\cos\phi=9 \Rightarrow z=9$

La grafica es un plano perpendicular al eje z, en el punto donde $z=9$

PUNTOS DE COORDENADAS ESFÉRICAS A CARTESIANAS EN DERIVE

Para obtener las coordenadas cartesianas de un punto que viene expresado en coordenadas esféricas, se utiliza el siguiente comando:

```
#63:   ESFCAR(ρ, θ, φ) := ρ·[SIN(φ)·COS(θ), SIN(φ)·SIN(θ), COS(φ)]
```

EJEMPLO 26. Obtenga las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas esféricas dadas: $\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

#64: $\mathrm{ESFCAR}\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

#65: $[\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\cdot\sqrt{2}]$

PUNTOS DE COORDENADAS CARTESIANAS A ESFÉRICAS.

Para obtener las coordenadas esféricas de un punto que viene expresado en coordenadas cartesianas esféricas, se utiliza el siguiente comando:

#66: $\mathrm{CARESF}(X, Y, Z) := \left[\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}, \mathrm{ATAN}\left(\frac{Y}{X}\right), \mathrm{ACOS}\left(\frac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}\right)\right]$

#67: $\mathrm{CARESF}(1, -1, -\sqrt{2})$

#68: $\left[2, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\cdot\pi}{4}\right]$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

PUNTOS DE COORDENADAS ESFÉRICAS A CILÍNDRICAS

Para obtener las coordenadas cilíndricas de un punto que viene expresado en coordenadas esféricas, se utiliza el siguiente comando:

#69: ESFCIL(ρ, θ, φ) := [ρSIN(φ), θ, ρCOS(φ)]

EJEMPLO 27. Obtenga un conjunto de coordenadas cilíndricas del punto que tiene las coordenadas esféricas dadas: $\left(4, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$

#70: $\mathrm{ESFCIL}\left(4, \frac{2\cdot\pi}{3}, \frac{5\cdot\pi}{6}\right)$

#71: $\left[2, \frac{2\cdot\pi}{3}, -2\cdot\sqrt{3}\right]$

PUNTOS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS.

Para obtener las coordenadas esféricas de un punto que viene expresado en coordenadas cilíndricas, se utiliza el siguiente comando:

#72: $\mathrm{CILESF}(\rho, \theta, z) := \left[\sqrt{(\rho^2 + z^2)}, \theta, \mathrm{ACOS}\left(\frac{z}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)}}\right)\right]$

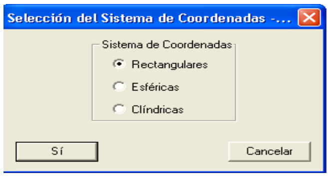
EJEMPLO 28. Determine un conjunto de coordenadas esféricas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas indicadas $\left(3, \frac{\pi}{6}, 3\right)$

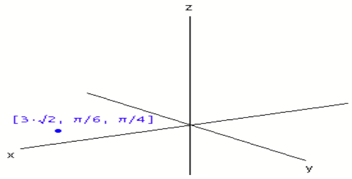
#73: $\mathrm{CILESF}\left(3, \frac{\pi}{6}, 3\right)$

#74: $\left[3\cdot\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

PARA GRAFICAR EN COORDENADAS ESFÉRICAS:

Para graficar el **PUNTO** anterior, se selecciona el punto, luego insertar, 3D, y seleccionar sistema de coordenadas esféricas.





ECUACIONES DE SUPERFICIES DE COORDENADAS RECTANGULARES A COORDENADAS ESFÉRICAS.

Ejemplo 29. Obtenga una ecuación en coordenadas esféricas de la superficie, $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$ grafique.

Se aplica estas ecuaciones $x = sen\phi\cos\theta; y = sen\phi sen\theta; z = \rho\cos\phi$ Y luego se resuelve

#75: $X^2 + Y^2 + Z^2 - 9\cdot Z = 0$

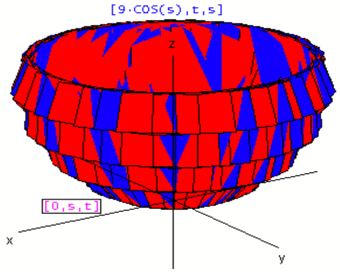
#76: $\rho^2 - 9\cdot\rho\cdot\mathrm{COS}(\phi) = 0$

#77: $\mathrm{SOLVE}(\rho^2 - 9\cdot\rho\cdot\mathrm{COS}(\phi) = 0, \rho, \mathrm{Real})$

#78: $\rho = 9\cdot\mathrm{COS}(\phi) \lor \rho = 0$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

Ahora se grafica ese resultado, con el procedimiento similar al de las coordenadas cilíndricas, pero seleccionando las coordenadas esféricas



EJEMPLO 30. Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas esféricas $\rho = 6\csc\phi$, grafique la superficie.

Se utiliza las siguientes conversiones, y luego se resuelve:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2; tg\theta = \frac{y}{x}; \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

#79: $\rho = 6 \cdot CSC(\phi)$

#80: $CARESF(X, Y, Z) := \left[\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}, ATAN\left(\frac{Y}{X}\right), ACOS\left(\frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}\right)\right]$

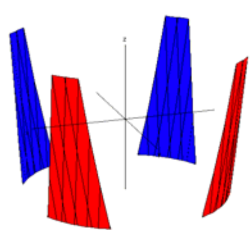
#81: $\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = \frac{6 \cdot \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}$

#82: $SOLVE\left(\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = \frac{6 \cdot \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}, [X, Y, Z], Real\right)$

#83: $(X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \wedge X^2 + Y^2 \neq 0) \vee X^2 + Y^2 = 36$

Nota: sólo tiene sentido $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ y se grafica en coordenadas cartesianas.

#84: $f(x, y) := X^2 + Y^2 - 36$



Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas