GRADIENTES Y DERIVADAS DIRECCIONALES

El gradiente de una función de $\mathbf{R}^n$ en **R** es el **VECTOR** de sus derivadas parciales:

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables. El gradiente de $f(x,y)$ es la función vectorial dada por: $\nabla f(x,y) = Gradf(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$

El programa DERIVE permite calcular el gradiente $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ de una función $f(x,y)$ con la ayuda de la función GRAD.

GRAD(*f*): Función que determina el gradiente de una función *f* dada. El sistema de coordenadas por defecto es el rectangular tridimensional cartesiano usando *x, y, z*.

GRAD(*f*,*v*): Función que determina el gradiente de una función *f* dada, siendo *v* un vector que contiene a las variables de *f*.

EJEMPLO 1. Determine el gradiente de $f(x,y) = x^2 - 4xy$ en el punto (1, 2)

#1: $f(x, y) := x^2 - 4\cdot x\cdot y$

#2: $\frac{d}{dx}(x^2 - 4\cdot x\cdot y)$

#3: $2\cdot x - 4\cdot y$

#4: $\frac{d}{dy}(x^2 - 4\cdot x\cdot y)$

#5: $-4\cdot x$

Entonces el gradiente viene expresado por $\nabla f(x,y) = \langle 2x - 4y, -4x \rangle$

La forma directa es utilizando el comando: **GRADf.** (Debe tener cuidado con el orden [x,y])

#6: $GRAD(x^2 - 4\cdot x\cdot y, [x, y])$

#7: $[2\cdot x - 4\cdot y, - 4\cdot x]$

#8: $[-6, -4]$

Nota: El resultado no es un punto es un vector: $-6\hat{i} - 4\hat{j}$

EJEMPLO 2. Determine el gradiente de $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en el punto (1, 1)

#9: $f(x, y) := \frac{x\cdot y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$

#10: $GRAD\left(\frac{x\cdot y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}, [x, y]\right)$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#11: $\left[\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]$

#12: $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$

Nota: La función **GRAD** está definida para funciones de tres variables, pero como nuestra función anterior es de dos variables tenemos que identificar cuáles son nuestras variables.

GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE TRES VARIABLES

Sea f una función de tres variables. El gradiente de f es la función vectorial dada por:

$$\nabla f(x,y,z) = grad\ f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{k} = \nabla f(x,y,z) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

EJEMPLO 3. Determine el gradiente ∇f de $f(x,y,z) = x^2 y e^{x-z}$

#1: $f(x, y, z) := x^2 \cdot y \cdot e^{x - z}$

#2: $\mathrm{GRAD}(x^2 \cdot y \cdot e^{x - z})$

#3: $\left[e^{x - z} \cdot (x^2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot y), x^2 \cdot e^{x - z}, - x^2 \cdot y \cdot e^{x - z}\right]$

Observe para el caso de tres variables que no es necesario identificar las variables.

EJEMPLO 4. Determine el vector gradiente de $f(x,y,z) = e^x seny + e^y senz + e^z senx$ en el punto $P(0,0,0)$

#5: $f(x, y, z) := e^x \cdot \mathrm{SIN}(y) + e^y \cdot \mathrm{SIN}(z) + e^z \cdot \mathrm{SIN}(x)$

#6: $\mathrm{GRAD}(e^x \cdot \mathrm{SIN}(y) + e^y \cdot \mathrm{SIN}(z) + e^z \cdot \mathrm{SIN}(x))$

#7: $\left[e^x \cdot \mathrm{SIN}(y) + e^z \cdot \mathrm{COS}(x), e^x \cdot \mathrm{COS}(y) + e^y \cdot \mathrm{SIN}(z), e^y \cdot \mathrm{COS}(z) + e^z \cdot \mathrm{SIN}(x)\right]$

#8: $[1, 1, 1]$

DERIVADA DIRECCIONAL DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES EN TÉRMINOS DE GRADIENTE.

Para obtener la derivada direccional de la función en dirección de un vector, se realiza el producto escalar del gradiente de f por el vector unitario del vector dado $\hat{u}$.

$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \bullet \hat{u}$ El símbolo ∇ es un operador diferencial vectorial y se define:

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

DERIVADA DIRECCIONAL DE FUNCIONES DE TRES VARIABLES EN TÉRMINOS DE GRADIENTE.

Si $f(x,y,z)$ es una función diferenciable de tres variables, y $\vec{v}$ un vector dado no nulo,, la derivada direccional de la función en la dirección de un vector unitario $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ es dada por $D_{\vec{u}}f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\bullet\hat{u}=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_1+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_2+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_3$

EJEMPLO 5. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ en el punto (4, -4) y en la dirección del vector $\vec{b}=2\hat{i}-3\hat{j}$

#9: $f(x, y) := \text{ATAN}\left(\frac{y}{x}\right)$

#10: $\text{GRAD}\left(\text{ATAN}\left(\frac{y}{x}\right), [x, y]\right)$

#11: $\left[-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right]$

#12: $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$

#13: $B := [2, -3]$

#14: $U := \frac{B}{|B|}$

#15: $U := \left[\frac{2\cdot\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\cdot\sqrt{13}}{13}\right]$

Recuerde que $\nabla f(x,y)=\left\langle\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right\rangle$; $\hat{u}=\left\langle\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{-3\sqrt{13}}{13}\right\rangle$ Y por último se aplica EL **PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES**. $D_{\vec{u}}f(x,y)=\nabla f(x,y)\bullet\hat{u}$

#16: $d_U = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right] \bullet \left[\frac{2\cdot\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\cdot\sqrt{13}}{13}\right]$

#17: $d_U = -\frac{\sqrt{13}}{104}$

EJEMPLO 6. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z)=\ln\left(1+x^2+y^2-z^2\right)$, el punto $P(1,-1,1)$, y el vector $\vec{v}=\langle 2,-2,-3\rangle$

#18: $f(x, y, z) := \text{LN}(1 + x^2 + y^2 - z^2)$

#19: v := [2, -2, -3]

Se escribe la siguiente expresión: **d = GRAD(LN(1 + x^2 + y^2 - z^2)) · v/ABS(v)**

#20: $d = \text{GRAD}(\text{LN}(1 + x^2 + y^2 - z^2)) \cdot \frac{v}{|v|}$

#21: $d = \frac{2\cdot\sqrt{17}\cdot(2\cdot x - 2\cdot y + 3\cdot z)}{17\cdot(x^2 + y^2 - z^2 + 1)}$

#22: $d = \frac{7\cdot\sqrt{17}}{17}$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE PARA UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea f una función de dos variables que es diferenciable en el punto $p(x,y)$

a) El valor máximo de $D_{\vec{u}} f(x,y)\ en\ p(x,y)$ es $\|\nabla f(x,y)\|$

b) La tasa de crecimiento máxima de $f(x,y)$ en $p(x,y)$ se alcanza en la dirección de $\nabla f(x,y)$

Nota: La derivada direccional $D_{\vec{u}} f(x,y)$ es la razón de cambio de $f(x,y)$ con respecto a la distancia en $p(x,y)$ y en la dirección determinada por el vector unitario.

COROLARIO:

Sea f una función de dos variables que es diferenciable en el punto $p(x,y)$

a) El valor mínimo de $D_{\vec{u}} f(x,y)\ en\ p(x,y)$ es $-\|\nabla f(x,y)\|$

b) La tasa de crecimiento mínima de $f(x,y)$ en $p(x,y)$ se alcanza en la dirección de $-\nabla f(x,y)$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE PARA UNA FUNCIÓN DE TRES VARIABLES

$D_{\vec{u}} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \bullet \hat{u}$

$\nabla f(x,y,z) = 0 \Rightarrow D_{\vec{u}} f(x,y,z) = 0; \quad \forall \vec{u}$

La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por $\nabla f(x,y,z)$. El máximo valor de $D_{\vec{u}} f(x,y,z) = \|\nabla f(x,y,z)\|$

La dirección de mínimo crecimiento de f viene dada por $-\nabla f(x,y,z)$. El mínimo valor de $D_{\vec{u}} f(x,y,z) = -\|\nabla f(x,y,z)\|$

EJEMPLO 7. Sea $f(x,y) = x^2 - 4xy$ encontrar la dirección en la que la función aumenta más rápidamente en el punto P (1, 2) y encontrar la tasa máxima de crecimiento en p.

#1: $f(x, y) := x^2 - 4\cdot x\cdot y$

#2: $\text{GRAD}(x^2 - 4\cdot x\cdot y, [x, y])$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

#3: $[2\cdot x - 4\cdot y, -4\cdot x]$

#4: $[-6, -4]$

$\nabla f(1,2) = \langle -6, -4 \rangle$

Entonces por el teorema anterior, la función crece más rápidamente en p (1, 2) en la dirección del vector $-6\hat{i} - 4\hat{j}$

La tasa máxima de crecimiento es:

#5: $|[-6, -4]|$

#6: $2\cdot\sqrt{13}$

EJEMPLO 8. La temperatura T en un punto (x, y, z) de un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio está dada por la fórmula $T(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)}$ Calcular:

a) La razón de cambio de T con respecto a la distancia en el punto P (1, 3, -2) en la dirección del vector $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

b) ¿En qué dirección a partir de P aumenta más rápidamente T? ¿Cuál es la tasa máxima de variación de T en P?

Parte a)

#7: $T(x, y, z) := \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

#8: $A := [1, -1, 1]$

#9: $T := \mathrm{GRAD}\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \cdot \dfrac{A}{|A|}$

#10: $T := -\dfrac{2\cdot\sqrt{3}\cdot(x - y + z)}{3\cdot(x^2 + y^2 + z^2)^2}$

#11: $T := \dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{147}$

#12: $T := 0.02356531710$

Entonces la tasa de cambio de T en P en la dirección del vector a es 0,02356531

Parte b) La tasa máxima de crecimiento de T en P se alcanza en la dirección del gradiente,

#13: $\mathrm{GRAD}\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$

#14: $\left[-\dfrac{2\cdot x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, -\dfrac{2\cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, -\dfrac{2\cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\right]$

#15: $\left[-\dfrac{1}{98}, -\dfrac{3}{98}, \dfrac{1}{49}\right]$

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas

La tasa máxima de cambio es igual a la magnitud del gradiente:

#16: $\left|\left[-\frac{1}{98}, -\frac{3}{98}, \frac{1}{49}\right]\right|$

#17: $\frac{\sqrt{14}}{98}$

#18: 0.03818017741

EJEMPLO 9. La temperatura del casco de una nave, cuando está en la posición (*x*, *y*, *z*) viene dada por $T(x,y,z)=e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde las variables vienen dados en metros. Actualmente está en el punto (1, 1, 1). ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápidamente la temperatura?

#1: $T(x, y, z) := e^{-x^2 - 2\cdot y^2 - 3\cdot z^2}$

#2: $\text{GRAD}\left(e^{-x^2 - 2\cdot y^2 - 3\cdot z^2}\right)$

#3: $\left[-2\cdot x\cdot e^{-x^2 - 2\cdot y^2 - 3\cdot z^2}, -4\cdot y\cdot e^{-x^2 - 2\cdot y^2 - 3\cdot z^2}, -6\cdot z\cdot e^{-x^2 - 2\cdot y^2 - 3\cdot z^2}\right]$

#4: $\left[-2\cdot e^{-6}, -4\cdot e^{-6}, -6\cdot e^{-6}\right]$

#5: $2\cdot e^{-6}\cdot[-1, -2, -3]$

Como la tasa de crecimiento mínima de $f(x,y,z)$ en $p(x,y,z)$ se alcanza en la dirección de $-\nabla f(x,y,z)$, entonces.

#6: $-2\cdot e^{-6}\cdot[-1, -2, -3]$

#7: $\left[2\cdot e^{-6}, 4\cdot e^{-6}, 6\cdot e^{-6}\right]$

#8: $2\cdot e^{-6}\cdot[1, 2, 3]$

La dirección de máximo decrecimiento **u** será la dirección unitaria opuesta al vector gradiente.

Dr. DÁMASO ROJAS http://damasorojas.con.ve http://damasorojas.jimdo.com
e-mail: damasorojas8@gmail.com twitter: @dmasorojas